# AM5 2008: Tracce delle lezioni- 6

## LO SPAZIO $L^\infty$: DUALITÁ E COMPATTEZZA DEBOLE$^\star$

Sia $\mu$ misura su $X$. $\quad L^\infty = L^\infty(X,\Sigma,\mu) :=$

$\{f| \quad f$ é misurabile ed esiste $\quad c > 0 : \quad |f(x)| \le c \quad$ quasi per ogni $\quad x\}$

e $\quad \|f\|_\infty := \inf\{c \ge 0 : \quad |f(x)| \le c \quad \text{q.o.} \quad x\} =$

$= \|f\|_\infty := \min\{c \ge 0 : \quad |f(x)| \le c \quad \text{q.o.} \quad x\}$, $\quad$ perché

$$\mu(\{x : \ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty\}) \ = \ \mu\Big( \cup_n \{x : \ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\} \Big) = 0$$

É facile vedere che $\quad (L^\infty, \|.\|_\infty)$ **é un Banach.**

**$L^\infty$ é il duale di $L^1$**

*Se* $\quad \mu \quad$ *é $\sigma$-finita, allora* $\quad (L^1)'$ **é isometricamente isomorfo a** $\quad L^\infty$

**TEOREMA DELLA MEDIA**.

*Sia $g \in L^1$. Se* $\quad m \le \frac{1}{\mu(E)} \int_E g \le M \quad \forall E \in \Sigma \quad$ *con $0 < \mu(E) < +\infty$, allora*

$$m \ \le \ g \ \le \ M \quad \textit{q.o.}$$

Prova. $\int |g| \ < \ +\infty \ \Rightarrow \ \mu(\{x \ : \ g(x) \ \ge \ M + \frac{1}{n}\}) \ < \ \infty \quad$ ed allora é anche $\mu(\{x : g(x) \ge M + \frac{1}{n}\}) = 0$ perché, se no,

$$M \ge \frac{1}{\mu(\{x : g(x) \ge M + \frac{1}{n}\})} \int_{\{x:g(x)\ge M+\frac{1}{n}\}} g \ \ge M + \frac{1}{n}$$

Dunque $\mu(\{x \ : \ g(x) \ > \ M\}) \ = \ \mu(\cup_n\{x \ : \ g(x) \ \ge \ M + \frac{1}{n}\}) \ = \ 0$. Ugualmente $\mu(\{x : g(x) < m\}) = 0$.

**Prova del Teorema di isomorfismo.** Data $\quad g \in L^\infty, \quad$ sia

$T(g) := l_g, \qquad l_g(f) = \int fg \quad \forall f \in L^1. \qquad$ É $\quad |l_g(f)| = |\int fg| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$

Dunque $\quad l_g \quad$ é un funzionale lineare e continuo su $L^1$ con

$$\|l_g\| \le \|g\|_\infty$$

$T$ **é isometria** (chiaramente lineare). Si tratta di provare che $\|l_g\| \geq \|g\|_\infty$. Sia $X = \cup_j E_j$, $E_j \subset E_{j+1}$, $\mu(E_j) < +\infty$. Allora $g_j := g\chi_{E_j} \in L^1$.
É $\left|\frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E g_j\right| = \left|\frac{1}{\mu(E)} \int g\, \chi_{E\cap E_j}\right| = \frac{l_g(\chi_{E\cap E_j})}{\mu(E)} \leq \frac{\|l_g\|\, \mu(E\cap E_j)}{\mu(E)} \leq \|l_g\|$ e quindi, per il Teorema della Media, $\|g_j\|_\infty \leq \|l_g\|$ e quindi $\|g\|_\infty \leq \|l_g\|$.

$T$ **é suriettiva.** Sia $X = \cup_j E_j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\mu(E_j) < +\infty$. Dato $l \in (L^1)'$, sia $l_j(f) := l(f\chi_{E_j})$. Da

$$|l_j(f)| \leq \|l\|\, \|f\chi_{E_j}\|_1 \ \leq\ \|l\| \sqrt{\mu(E_j)}\, \|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2$$

segue che $l_j$ é lineare e continuo su $L^2$ e quindi

$$\exists g_j \in L^2 : \qquad l(f\chi_{E_j}) = l_j(f) = \int f\, g_j \qquad \forall f \in L^2$$

Allora, presa $f = \chi_{E_i}\, sign\, g_j$, si ha che, se $i \neq j$, $0 = l(\chi_{E_i}\, sign\, g_j\, \chi_{E_j}) = \int\limits_{E_i} |g_j|$ e quindi $g_j = 0$ q.o. in $E_j^c$. In particolare $g_j \in L^1$ e quindi, dal teorema della media e

$$\left|\frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E g_j\right| = \frac{l(\chi_{E\cap E_j})}{\mu(E)} \ \leq\ \|l\|$$

segue che $g_j \in L^\infty$. Ora, se $f \in L^1$, allora $f_{|E_j}$ é approssimabile in $L^1(E_j)$ mediante funzioni $L^2$ e quindi, dalla limitatezza di $g_j$ e dalla continuitá di $l$ segue che

$$l(f\chi_{E_j}) = l_j(f) = \int f g_j \qquad \forall f \in L^1$$

Infine, siccome $\sum_{j=1}^n f\chi_{E_j}$ converge a $f$ in $L^1$, dalla continuitá di $l$ segue che

$$l(f) = \sum_j l(f\chi_{E_j}) = \sum \int f g_j = \int f(\sum_j g_j)$$

ove $\|\sum_j g_j\|_\infty \leq \|l\|$.

### Il duale di $L^\infty$ non é $L^1$

*Data $g \in L^1(X,\mu)$, sia $l_g(f) := \int_X fg d\mu$, $f \in L^\infty$. $L(g) := l_g$ é* **isometria lineare** *di $L^1$ in $(L^\infty)'$, ma* **non** *é, in generale,* **suriettiva**.

Da $|l_g(f)| \leq \|g\|_1 \ \|f\|_\infty$, segue che $l_g \in (L^\infty)'$ e $\|Lg\|_\infty \leq \|g\|_1$ : $L$ é operatore lineare continuo di $L^1$ in $(L^\infty)'$. Di piú, presa $f = sign \ g$, $\|l_g\| \geq \int |g|$.
Controesempio. Se

$$l(\varphi) := \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

$l$ é funzionale lineare continuo su $C_0^\infty$, e, per il Teorema di Hahn-Banach, $l$ ha un prolungamento lineare e continuo su tutto $L^\infty$, che indichiamo ancora con $l$. Se esistesse $g \in L^1$ tale che $l(f) = \int gf$, $\forall f \in L^\infty$ sarebbe

$$\varphi(0) \quad = \quad \int g(x)\varphi(nx)dx \to_n 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad ; \quad \text{contraddizione se } \varphi(0) \neq 0.$$

**Convergenza debole in $L^1$.** Siano $f_n \in L^1$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^1 \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^\infty$$

**Convergenza debole in $L^\infty$.** Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^\infty \quad \Leftrightarrow \quad l(f_n) \to l(f) \quad \forall l \in (L^\infty)'$$

**Convergenza debole$^*$ in $L^\infty$.** Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \text{in} \quad L^\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int f_n\, h \to \int f\, h \quad \forall h \in L^1$$

**NOTA**. Diversamente da quanto accade in $L^p, p \in (1, +\infty)$, **successioni limitate in $L^1$ o in $L^\infty$ non hanno, in generale, estratte debolmente convergenti**.

(i) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f \geq 0$, $\int f = 1$, $f_n(x) := n^N f(nx)$. É $\int_{\mathbf{R}^N} |f_n|dx = \int_{\mathbf{R}^N} |f|$.
Supponiamo che esistano $\hat{f} \in L^1$ ed $f_{n_k}$ tali che $\int f_{n_k} g \to \int \hat{f} g \quad \forall g \in C_0^\infty$. Quindi

$$\int \hat{f} g = \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} f_{n_k}(x) g(x) dx \ = \ \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} f(y) \ g(\frac{y}{n_k})dy = g(0) \qquad \forall g \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

e quindi $g(0) = \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(x) g(jx)dx \to_j 0$ che é assurdo se $g(0) \neq 0$.
(ii) Siano $f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tali funzioni formano un sistema ortonormale in $L^2([0,2\pi]$ e quindi convergono debolmente a zero in $L^2$. Di piú, si ha

**Lemma (Riemann-Lebesgue)** $f_n \rightharpoonup^* 0$: $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\, g(t)dt \to_n 0 \qquad \forall g \in L^1$

La successione $f_n$ non ha peró estratte debolmente convergenti in $L^\infty$. Segue da

1. Se $\phi_n \in C([0,2\pi])$ tende debolmente a zero in $L^\infty$ allora $\phi_n(t) \to_n 0 \quad \forall t$.
2. Ogni sottosuccessione $f_{n_k}$ converge al piú su un insieme di misura nulla.

Il fatto 1. si vede considerando $l_t(\phi) := \phi(t)$, $t \in [0,2\pi]$. Tale $l_t$ é funzionale lineare e continuo (rispetto alla norma del sup) su $C([0,2\pi])$, ed é quindi, per Hahn-Banach, restrizione di un $l \in (L^\infty)'$. Ovviamente $l_t(\phi_n) \to_n 0 \Leftrightarrow \phi_n(t) \to_n 0$.
Il fatto 2. segue da Riemann-Lebesgue ed é lasciato come esercizio.

**Compattezza debole$^*$ (Teorema di Banach-Alaoglu).** *Siano $\mu$ $\sigma$-finita ed $L^1(\mu)$ separabile. Allora*

$$\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty \;\Rightarrow\; \exists n_k,\; f \in L^\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup^* f$$

Infatti : $\sup_n |\int f_n h| \le (\sup_n \|f_n\|_\infty)\, \|h\|_1 \;\; \forall\, h \in L^1 \Rightarrow$ ( procedimento diagonale di Cantor !) $\exists n_k : \quad l(h) := \lim_k \int f_{n_k} h \quad$ esiste finito $\quad \forall h \in D \subset L^1$ numerabile e denso; $l$ si prolunga in modo lineare e continuo a tutto $L^1$ e quindi

$$\exists g \in L^\infty : \quad \lim_k \int f_{n_k} h = l(h) = \int gh \quad \forall h \in D$$

e quindi (in modo standard) $\quad \lim_k \int f_{n_k} h = \int gh \quad \forall h \in L^1$.

**Funzionali lineari continui e misure.** Sia $l \in (L^\infty(X,\Sigma,\mu))'$. Allora

$$\exists g \in L^1 : \quad l(f) = \int fg d\mu \qquad \forall f \in L^\infty \;\Leftrightarrow\; \quad (f_n \rightharpoonup^* 0 \;\Rightarrow\; l(f_n) \to 0)$$

$\Rightarrow$. Ovvio. $\quad \Leftarrow$. Proviamolo nell'ipotesi aggiuntiva $\quad f \ge 0 \Rightarrow l(f) \ge 0$. In tal caso $\mu_l(E) := l(\chi_E)$, $E \in \Sigma$ é misura perché $\quad E_j \in \Sigma$, $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \ne j \;\Rightarrow$ $\chi_{\cup_{j \ge n+1} E_j} \to_n 0 \,\forall x \;\Rightarrow\; \int \chi_{\cup_{j\ge 1} E_j} \; h \to_n 0 \quad \forall h \in L^1 \;\Rightarrow\; l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j}) \to_n 0 \;\Rightarrow$

$$\mu_l(\cup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^n l(\chi_{E_j}) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1}E_j}) = \sum_{j=1}^n \mu_l(E_j) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1}E_j}) \to_n \sum_{j=1}^\infty \mu_l(E_j)$$

Ora, per linearitá, $\quad l(\varphi) = \int \varphi d\mu_l \quad$ se $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$.
Poi, se $0 \le \varphi_j \le f \in L^\infty(\mu)$ tende puntualmente ed in modo monotono a $f$, é $\int \varphi_j d\mu_l \to_j \int f d\mu_l$. Ma, per Lebesgue, é anche $\int \varphi_j h d\mu \to \int f h d\mu \quad \forall h \in L^1(\mu)$ e quindi $\int \varphi_j d\mu_l = l(\varphi_j) \to_j l(f)$. Quindi $\int f d\mu_l = l(f)$ e, scrivendo $f = f^+ - f^-$,

$$l(f) = \int f d\mu_l \qquad \forall f \in L^\infty(\mu)$$

Infine, $\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \nu_l(E) = l(\chi_E) = 0$, ed il fatto che esista $g \in L^1(\mu)$ tale che $\int f d\mu_l = \int fg d\mu \quad \forall f \in L^\infty(\mu)$ é conseguenza del seguente Teorema di rappresentazione

## IL TEOREMA DI RADON-NIKODYM

*Sia* $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ *sigma algebra ; siano* $\nu, \mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ *misure, rispettivamente finita,* $\sigma$*- finita. Allora* $\exists f \in L^1(X, \mu)$, $\exists Z \in \Sigma$ *con* $\mu(Z) = 0$ *tali che*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Prova. Sia $\lambda(E) := \mu(E) + \nu(E)$, $E \in \Sigma$, per cui per ogni $\varphi$ semplice e non negativa, $\int \varphi\, d\lambda = \int \varphi\, d\mu + \int \varphi\, d\nu$ e quindi, per ogni $h$ $\Sigma$-misurabile

$$\int |h|\, d\lambda = \int |h|\, d\mu + \int |h|\, d\nu \qquad \int |h|\, d\lambda \geq \int |h|\, d\mu, \qquad \int |h|\, d\lambda \geq \int |h|\, d\nu$$

In particolare, $L^1(\lambda) \subset L^1(\nu)$ e $h \to \int h\, d\nu$ é continuo in $L^1(\lambda)$ e quindi

$$(*) \qquad \exists g \in L^\infty(\lambda) : \quad \int h\, d\nu = \int g\, h\, d\lambda \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

Inoltre, $\lambda(E) > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E g\, d\lambda = \frac{1}{\lambda(E)} \int \chi_E\, d\nu = \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} \leq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq g \leq 1 \qquad \lambda - q.o.$$

Iteriamo ora $(*)$:

$$(**) \qquad \int h\, d\nu = \int g\, h\, d\lambda = \int gh\, d\mu + \int g^2\, h\, d\lambda = \int (g + g^2) h\, d\mu + \int g^2\, h\, d\nu$$

$$= \ldots\ldots = \int (g + g^2 + \ldots + g^n)\, h\, d\mu + \int g^n\, h\, d\nu \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

In particolare, posto $h \equiv 1$ in $(**)$, vediamo che

$$\nu(X) \geq \int \left(\sum_n g^n\right) d\mu \quad \text{e quindi} \quad \sum_n g^n(x) < +\infty \quad \mu-q.o. \quad \text{e} \quad \mu(\{h = 1\}) = 0$$

Poniamo $f := \sum_n g^n \in L^1(\mu)$ $Z := \{h = 1\}$ . Fissata in $(**)$ $h$ limitata e in $L^1(\lambda)$, passando al limite troviamo $\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu + \int_Z h\, d\nu$ . Sia infine $h$ soltanto limitata (e misurabile) e sia $X = \cup_j E_j$, $E_j \in \Sigma$, $\mu(E_j) < +\infty$, $E_j \subset E_{j+1}$. Allora $\int h\, \chi_{E_j}\, d\nu = \int h\, \chi_{E_j}\, f\, d\mu + \int_Z h\chi_{E_j}\, d\nu$ e passando al limite in $j$ otteniamo

$$\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu + \int_Z h\, d\nu \qquad \forall h \quad \text{misurabile e limitata}$$

**Misure assolutamente continue**
**misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.**

Siano $\mu, \nu$ misure ($\sigma$-finita, finita) definite sulla $\sigma$-algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}\,(X)$ :

$\nu \prec\prec \mu$ ($\nu$ é **assolutamente continua** rispetto a $\mu$ ) se $\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(E) = 0.$
$\nu$ é **singolare** rispetto a $\mu$ ($\nu \perp \mu$) $\Leftrightarrow$ $\exists Z \in \Sigma : \mu(Z) = 0, \nu(Z^c) = 0$

É vero che : $\exists\ \nu_{ac} \prec\prec \mu,\ \nu_s \perp \mu$ unicamente determinate : $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$

Che tale decomposizione esista segue dal Teorema di Radon-Nikodym:

$$\exists h \in L^1_\mu, \quad Z \in \Sigma, \quad \mu(Z) = 0 : \quad \nu(E) = \int_E h d\mu + \nu(Z \cap E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E)$$

$$\nu_{ac}(E) := \int_E h d\mu, \qquad \nu_s(E) := \nu(Z \cap E)$$

L'unicitá é poi facile da verificare.

**IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ**

*Sia* $l$ *funzionale lineare su* $C_0(\mathbf{R}^N)$ *tale che* $l(\varphi) \geq 0$ *se* $\varphi \geq 0$. *Allora*

$$\exists \quad \mu \quad \textit{misura di Radon tale che} \qquad l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

**Prova.** Sia

$\mu(\Omega) :=\ \sup\{l(\varphi) :\ \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ \textit{supp}\, \varphi \subset \Omega\},\ \forall \Omega \subset \mathbf{R}^N,$ aperto

$\mu(A) :=\ \inf\{\sum_j \mu(\Omega_j) :\quad A \subset \cup_j \Omega_j \quad \Omega_j \subset \mathbf{R}^N$ aperti$\}$

**Passo 1.** $\mu$ é misura (ovvero, é numerabilmente subadditiva)

**Passo 2.** $\mu$ é misura di Radon (ovvero é Borel regolare, finita sui compatti)

**Passo 3.** $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N).$

**Prova passo 1.** Siano $\Omega \subset \cup_j \Omega_j$ aperti, $K :=\ \textit{supp}\ \varphi \subset \Omega.$ Siccome $K$ é compatto, esiste $n$ tale che $K \subset \cup_{j=1}^n \Omega_j$. Sia $\psi_j$ partizione dell'unitá:

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \textit{supp}\, \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

Allora

$$l(\varphi) \;=\; l(\sum_{j=1}^{n} \psi\, \psi_j) \;\;=\;\; \sum_{j=1}^{n} l(\psi\psi_j) \;\;\le\;\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Omega_j) \qquad\qquad (\text{perché} \quad supp\ \psi_j \subset \Omega_j)$$

e quindi $\mu(\Omega) \le \sum\limits_j \mu(\Omega_j)$. In particolare $\mu(\Omega) = \inf\{\sum_j \mu(\Omega_j) : \quad \Omega \subset \cup_j \Omega_j\}$
Sia ora $A \subset \cup_i A_i$. Possiamo supporre $\mu(A_i) < +\infty \quad \forall i$. Sia $A_i \subset \cup_j \Omega_{ij}$ e

$$\mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \ge \sum_j \mu(\Omega_{ij})$$

Allora $\epsilon + \sum\limits_i \mu(A_i) \ge \sum\limits_{ij} \mu(\Omega_{ij}) \ge \mu(A)$.

**Prova passo 2.** Proviamo che $\mu$ é misura metrica.
Se $\Omega_i, i = 1, 2$ sono aperti disgiunti e $supp\, \varphi_i \subset \Omega_i$, $0 \le \varphi_i \le 1$ allora $supp\, [\varphi_1 + \varphi_2] \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ e $0 \le \varphi_1 + \varphi_2 \le 1$ e quindi

$$l(\varphi_1) + l(\varphi_2) = l(\varphi_1 + \varphi_2) \le \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{ e quindi } \quad \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) \le \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Allora, se $d(A_1, A_2) > 0$, esistono $\Omega_i$ aperti disgiunti tali che $A_i \subset \Omega_j$ e quindi, se $A_1 \cup A_2 \subset \Omega$ aperto, risulta

$$\mu(\Omega) \ge \mu([\Omega \cap \Omega_1] \cup [\Omega \cap \Omega_2]) = \mu(\Omega \cap \Omega_1) + \mu(\Omega \cap \Omega_2) \ge \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Passando all'inf: $\mu(A_1 \cup A_2) \ge \mu(A_1) + \mu(A_2)$ e quindi $\mu$ é misura metrica e quindi boreliana.
Poi , $\mu$ é Borel regolare, perché $\mu(A) = \mu(\cap \Omega_j)$ se $\mu(A) < +\infty, \mu(A) + \frac{1}{j} \ge \mu(\Omega_j)$.
Infine, $\mu(K) < +\infty$ se $K$ é compatto. E ció segue subito dal fatto che, essendo $l$ positivo, si ha che

$$\forall K \quad \text{compatto} \quad \exists c_K : \quad supp\ \varphi \subset K \quad \Rightarrow \quad |l(\varphi)| \le c_K\ \|\varphi\|_\infty$$

Infatti, fissato $\Omega$ aperto limitato contenente $K$, sia $\psi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \le \psi \le 1$ con $supp\ \psi \subset \Omega$ e $\psi \equiv 1$ in $K$. Allora

$$\|\varphi\|_\infty\, \psi \ge \varphi \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l(\varphi) \le\ l(\|\varphi\|_\infty\, \psi) = \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$$

Siccome é anche $l(-\varphi) \le \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$, concludiamo che $|l(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$.

**Prova passo 3.** Sia $K := supp\, \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$. Fissato $\epsilon > 0$, siano

$$t_0 < \inf\ \varphi < t_1 \ldots < t_n = \sup\ \varphi \quad \text{ tali che } \quad t_j - t_{j-1} < \epsilon \quad \forall j$$

e siano

$$E_j := \varphi^{-1}((t_{j-1}, t_j]) \cap K \subset \Omega_j : \quad \mu(\Omega_j) \leq \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}, \quad \varphi(x) \leq t_j + \epsilon \quad \forall x \in \Omega_j, \quad \forall j$$

Notiamo che gli $E_j$ sono disgiunti e $K = \cup_j E_j$. Sia $\psi_j$ partizione dell'unitá:

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \textit{supp } \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_j \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

e quindi $\varphi \equiv \sum_j \varphi\ \psi_j$. Ora,

$$t_j - \epsilon < t_{j-1} < \varphi(x) \quad \forall x \in E_j, \quad \psi_j\, \varphi \leq (t_j + \epsilon)\, \psi_j \quad \Rightarrow$$

$$l(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} l(\varphi\, \psi_j) \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon) l(\psi_j) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\, \mu(\Omega_j) \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon) \left[\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon) \mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon) \frac{\epsilon}{n} = \sum_{j=1}^{n} (t_j - \epsilon) \mu(E_j) + 2\epsilon\mu(K) + \epsilon(\sup\varphi + \epsilon) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} \varphi\, d\mu + \epsilon[\, 2\mu(K) + \sup\varphi + \epsilon\,] =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu + \epsilon[\, 2\mu(K) + \sup\varphi + \epsilon\,]$$

Ma é anche $l(-\varphi) \leq \int_{\mathbf{R}^N} [-\varphi]\, d\mu$, e quindi $l(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$.

NOTA. Esattamente come per la misura di Lebesgue si vede che

$$\forall E \quad \text{boreliano} \qquad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : \quad K \subset E, \quad K \quad \text{compatto}\}$$

Ció comporta l'**unicitá di** $\mu$:

se $l(\varphi) = \int \varphi d\nu = \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, allora, dato un compatto $K$ e preso un aperto $\Omega$ contenente $K$ e tale che $\nu(K) + \epsilon \geq \nu(\Omega)$, e presa una $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$, $\textit{supp}\, \varphi \subset \Omega, \varphi \equiv 1$ su $K$ si ha

$$\mu(K) = \int_K d\mu \leq \int \varphi d\mu = l(\varphi) = \int_K d\nu \leq \nu(\Omega) \leq \nu(K) + \epsilon$$

## Convergenza debole e compattezza per misure di Radon

**Definizione.** Siano $\mu_n$ misure di Radon in $\mathbf{R}^N$. Diremo che

$\mu_n \rightharpoonup \mu$ (converge debolmente a $\mu$) se $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n \to \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$

Esempio. (i) Siano $0 \le f_n$, $f_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\mu_n(E) := \int_E f_n dx$, $E$ boreliano. Allora $\mu_n \rightharpoonup \mu \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{R}^N} f_n\ \varphi dx \to \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

(ii) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\int |f| = 1$, $f_n(x) := n^N |f(nx)|$, $\mu_n(E) := \int_{\mathbf{R}^N} f_n dx$.
Allora $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, ove $\delta_0(E) = 1$ se $0 \in E$ e $\delta_0(E) = 1$ se $0 \notin E$ .

**Teorema** *Siano $\mu_n$ misure di Radon tali che* $\sup_n \mu_n(B_R) < +\infty\ \forall R$. *Allora*

$$\exists n_k, \mu : \quad \mu_{n_k} \rightharpoonup_k \mu$$

Prova. Dal Teorema di approssimazione di Weierstrass segue che esiste un insieme numerabile $D \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \exists R > 0, \quad \exists \varphi_n \in D \cap C_0(B_R) \quad \text{tale che} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$$

Dall'ipotesi segue che $\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, $\sup_n |\int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n| < +\infty$ e quindi l'argomento diagonale di Cantor assicura che

$$\exists \mu_{n_k} : \quad l(\varphi) := \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_{n_k} \qquad \text{esiste finito} \quad \forall \varphi \in < D >$$

e, ovviamente, $l$ é lineare e positivo e quindi

$$\forall R > 0, \quad \exists c_R : \qquad |l(\varphi)| \le c_R\ \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_0(B_R)$$

Ció implica che, se $\varphi_n \in C_0(B_R) \cap < D >$, $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$ allora $\lim_n l(\varphi_n)$ esiste finito e dipende solo da $\varphi$, ovvero $l$ si estende a un funzionale lineare e positivo su $C_0(\mathbf{R}^N)$. In virtú del Teorema di Riesz esiste una misura di Radon $\mu$ tale che

$$l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu = \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_{n_k} \quad \forall \varphi \in < D >$$

Da ció segue facilmente che la convergenza ha infatti luogo su tutto $C_0(\mathbf{R}^N)$.

# Esercizi e problemi 6

**Esercizio 1**. Provare che $l^\infty$ non é separabile.
Trovare una successione $l_n \in (l^\infty)'$ limitata, che non ha estratte debole$^*$ convergenti.

**Esercizio 2**. Sia $c_0 := \{x \in l^\infty : \quad x(j) \to_j 0\}$ .

(i) Provare che $c_0$ é sottospazio lineare chiuso di $l^\infty$ e che

$$\forall a \in l^\infty, \quad \exists a_n \in c_0 : \qquad a_n \rightharpoonup^\star a$$

(non é in particolare vero che $x_n \in C \subset l^\infty$ chiuso e convesso, $x_n \rightharpoonup^\star x$ in $l^\infty$ $\Rightarrow$ $x \in C$).

(ii) Sia $h \in l^1$. Posto $l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_j h(j)\, x(j) \quad \forall x \in c_0$, provare che $Lh := l_h$ é una isometria lineare suriettiva di $l^1$ su $(c_0)'$ ($l^1$ é il duale di $c_0$...ma $c_0$ non é il duale di $l^1$!).

(iii) Mostrare con un esempio che non tutte le successioni limitate in $c_0$ hanno estratte debolmente convergenti.

**Esercizio 3**. Provare che

$$x_n \in l^1, \quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\|_1 \to_n 0$$

**Esercizio 4**. Sia $f$ misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

**Esercizio 5**. Sia $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu$, $\nu$ misura di Radon.

Supponiamo che $l$ si prolunghi a tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$ in un funzionale della forma $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, f\, dx$ con $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Provare che $\nu$ é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

## CENNI DI SOLUZIONI

**Esercizio 1**. Sia $A := \{x : \mathbf{N} \to \{0, 1\}\} = 2^{\mathbf{N}}$. Come noto, $A$ non é numerabile (ha la potenza del continuo). Siccome

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x - y\|_\infty = 1$$

esiste in $l^\infty$ una famiglia non numerabile di palle disgiunte: un insieme denso in $l^\infty$ , dovendo intersecare ciascuna di tali palle, non puó dunque essere numerabile.

Sia $l_n(x) := x(n) \quad \forall x \in l^\infty$. É

$$|l_n(x)| = |x(n)| \le \sup_j |x(j)| = \|x\|_\infty \quad \text{e quindi} \quad \|l_n\| = 1$$

(infatti, se $e_n(j) := 0$ se $j \neq n$ e $e_n(n) := 1$, allora $l_n(e_n) = 1$).
Siccome $l_{n_k} \rightharpoonup^\star l \quad \Leftrightarrow \quad x(n_k) = l_{n_k}(x) \to l(x)$ implica, in particolare, che $x(n_k)$ converge, tale $l$ non puó esistere perché, quale che sia la selezione $n_k$ esiste una successione limitata $x$ tale che la $k \to x(n_k)$ non converga.

**Esercizio 2**. (i) Chiaramente,

$$x_n(j) \to_j 0 \quad \forall n, \quad \sup_j |x_n(j) - x(j)| \to_n 0 \quad \Rightarrow$$

$$|x(j)| \quad \le \quad |x(j) - x_n(j)| + |x_n(j)| \quad \le \quad 2\epsilon$$

se $n = n_\epsilon$ é abbastanza grande e $j \ge j(n_\epsilon)$, ovvero $x \in c_0$ e quindi $c_0$ é chiuso in $l^\infty$.

Ricordiamo qui che, pensato $\mathbf{N}$ munito della misura che conta, i corrispondenti $L^p$ si indicano $l^p$. In particolare, $l^\infty$ é il duale di $l^1$:

$$\forall\, h \in l^\infty, \quad l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\, x(j) \quad \forall x \in l^1, \quad e \quad Lh := l_h$$

é isometria lineare suriettiva di $l^\infty$ su $(l^1)'$. Esempio: se $b_n := \chi_{\{1,\ldots,n\}}$, $b_n \in c_0$ e $l_{b_n}(x) := \int_{\mathbf{N}} b_n\, x = \sum_{j=1}^{n} x(j) \quad \forall x \in l^1$. Si ha $l_{b_n}(x) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j) = \int_{\mathbf{N}} x = l_{\chi_{\mathbf{N}}}$ ovvero $b_n \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. Piú in generale, $\forall a \in \mathbf{N}$ e posto $a_n := a\, b_n$ , risulta

$$l_{a_n}(x) = \sum_j x(j)\, a_n(j) = \sum_{j=1}^{n} x(j)\, a(j) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, a(j) = l_a(x) \quad \forall x \in l^1$$

ovvero $\quad a_n \rightharpoonup^\star a$ in $l^\infty$.

(ii) Se, per $h \in l^1$, $Lh := l_h$, $l_h(x) := \sum_j h(j)\, x(j)$, $Lh$ é funzionale lineare e continuo su $l^\infty$ e quindi anche su $c_0$ con $\|l_h\| = \|h\|_1$ perché $|l_h(x)| \le \|x\|_\infty \sum_j |h(j)|$ e, viceversa, posto $x_n(j) := sign\, h(j)\, b_n(j)$ risulta $x_n \in c_0$, $\|x_n\|_\infty = 1$ e quindi $\|l_h\| \ge l_h(x_n) = \sum_{j=1}^n |h(j)| \quad \forall n$ .

Suriettivitá di $L$. Sia $l \in (c_0)'$ e , posto $e_n := \chi_{\{n\}} \in c_0$, sia $h := (l(e_j))_{j\in\mathbf{N}}$. Intanto, $h \in l^1$, perché $\sum\limits_{j=1}^n |h(j)| =$

$$l(\sum_{j=1}^n sign\;\, h(j)\, e_j) \le \|l\|\;\, \|\sum_{j=1}^n sign\;\, h(j)\, e_j\|_\infty \le \|l\| \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^\infty |h(j)| \le \|l\| < \infty$$

Infine $\qquad \|x - b_n\, x\|_\infty = \sup\limits_{j\ge n+1} |x(j)| \to_n 0 \quad \forall x \in c_0 \qquad \Rightarrow$

$$l(x) = \lim_n l(x\, b_n) = \lim_n [\sum_{j=1}^n l(x(j)e_j) = \sum_{j=1}^\infty x(j)\, l(e_j) = l_h(x)$$

(iii) Come in (ii): $b_n := \chi_{\{1,\ldots,n\}} \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. In particolare, $l_{b_n}(e_j) \to_n 1 \quad \forall j$.

**Esercizio 3**. Per assurdo (passando eventualmente ad una sottosuccessione)

$\exists x_n \rightharpoonup 0$ in $l^1$ tale che $\|x_n\|_1 \ge \delta > 0$, e quindi, sostituendo $x_n$ con $\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$

$$\exists x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{con} \quad \|x_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Da $x_n \rightharpoonup 0$ ovvero $\sum\limits_j x_n(j)\, a(j) \to_n 0 \quad \forall a \in l^\infty$ segue, prendendo $a = \chi_{\{i\}}$,

$$x_n(i) \to_n 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Quindi, per ogni fissato $m \in \mathbf{N}$, $\quad \sum\limits_{j>m} |x_n(j)| > \frac{3}{4} \quad \forall n \ge n_m$

Siano poi $k_1 < l_1$ tali che $\sum\limits_{j=k_1}^{l_1} |x_1(j)| \ge \frac{3}{4}$.

Detto $n_1 = 1$, sia $n_2$ tale che se $k_2 > l_1$ ed $l_2 > k_2$ é abbastanza grande risulti

$$\sum_{j=k_2}^{l_2} |x_{n_2}(j)| \ge \frac{3}{4}$$

Iterando, si costruisce una sottosuccessione $x_{n_i}$ tale che, se $k_i > l_{i-1}$ ed $l_i$ é abbastanza grande risulti

$$\forall i \in \mathbf{N}: \qquad \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| \;\ge\; \frac{3}{4} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \le \frac{1}{4}$$

Se $\quad a(j) = \ sign \ x_{n_i}(j) \ \forall j = k_i, \ldots, l_i,$ é $\quad a \in l^\infty$ e quindi $\sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \to_i 0$

mentre $\quad \displaystyle\sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \geq \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| - \left[\sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)|\right] \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

contraddizione.

**Esercizio 4**. (i) Sia $\mu(\{x: \ |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{\{x:\ |f(x)|\geq c\}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq c\mu(\{x: \ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq c \limsup_{p\to+\infty} \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\}) = 0$$

se $c > \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\quad \|f\|_\infty \leq \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

(ii) $\quad p > 1 \quad \Rightarrow \quad \int |f|^p = \int |f| \ |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \ \|f\|_\infty^{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \ \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $\quad c < \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\}) > 0$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c\, \mu(\{x: \ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq c \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

**Esercizio 5**. $\quad l(\varphi) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é
funzionale lineare e continuo su $C_0(\mathbf{R}^N)$, sottospazio lineare di $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$

($dx$ indichi la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$; notiamo che nella classe delle funzioni uguali q.o. a una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \varphi$ é l'unico rappresentante continuo).

Per Hahn-Banach, $l$ ha un prolungamento lineare e continuo su tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$.

Supponiamo esista $\quad g \in L^1: \quad l(f) = \int gf, \quad \forall f \in L^\infty.$ Allora, se $E$ boreliano di misura (di Lebesgue) nulla, si ha che

$\chi_E$ é limite q.o. di una successione $\quad \varphi_n \in C_0(\mathbf{R}^N)$, con $\chi_E \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad \forall x$
e quindi

$$l(\varphi_n) = \int \varphi_n\, g \to_n \int \chi_E\, g = 0$$

(per il Teorema di Lebesgue ). Ció implica

$$\int \chi_E\, d\nu \leq \underline{\lim}_n \int \varphi_n\, d\nu = \underline{\lim}_n l(\varphi_n) = \underline{\lim}_n \int \varphi_n\, g = 0$$