

Esecitazione AM3 n.4-A.A. 2007-2008

Integrali impropri

1. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

2. Integrando per parti nell'integrale $\int e^{-x^2} dx$ calcolare

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

3. Dimostrare che la funzione $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha}$ é integrabile in senso improprio in $I := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$ se $\alpha < \frac{3}{2}$, mentre é integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}^3 \setminus I$ se $\alpha > \frac{3}{2}$. calcolare gli integrali in questi casi.

4. Calcolare l'integrale

$$\int_T \log(y + 2x) dx dy$$

dove T é il dominio delimitato dalle rette $y + 2x = 0$, $y + 2x = 1$ e dalle parabole $y = x^2$ e $y = x^2 + 1$.

5. Calcolare l'integrale

$$\int_T (x + \log y) dx dy dz$$

dove T é il tetraedro con vertici nei punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$.