Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 Soluzioni Tutorato 2

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G. Mancini, D. Piras
Tutorato 2 del 26 Febbraio 2008

Esercizio 1

1. $F(x,y) = 1 - e^y + \sin x$ in $(0,0)$ F è una funzione di classe C^1 tale che $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -e^y|_{(0,0)} = -1 \neq 0$ dunque per il teorema della funzione implicita $\exists$r, $\rho > 0$ tali che $\sup_{B_r(0)} |F(x,0)| \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ e $\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ (dove $T = (\frac{\partial F}{\partial y})^{-1}$) e per tali r e ρ $\exists g : B_r(0) \longrightarrow B_\rho(0)$ tale che in un intorno del punto $(0,0)$ l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di g. Stimiamo ora i raggi r e ρ
   $|F(x,0)| = |\sin x| \leq |x| \leq r$ quindi se vogliamo avere che
   $\sup_{B_r(0)} |F(x,0)| \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|} = \dfrac{\rho}{2}$ si deve prendere $r \leq \frac{\rho}{2}$. Inoltre $\left|1 + \dfrac{\partial F}{\partial y}\right| =$
   $|1 - e^y| \leq 3|y| \leq 3\rho$ quindi per avere $\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ si deve prendere $\rho \leq \frac{1}{6}$. Dunque possiamo prendere $\rho = \frac{1}{6}$ e $r \leq \frac{1}{12}$.
   Calcoliamo ora lo sviluppo in serie di Taylor di g. Sappiamo che $F(x, g(x)) = 1 - e^{g(x)} + \sin x$; Derivando rispetto ad x otteniamo che $-e^{g(x)}g'(x) + \cos x = 0$
   da cui $-g'(0) + 1 = 0 \Longrightarrow g'(0) = 1$. Derivando ulteriormente la relazione precedente otteniamo che $-e^{g(x)}g'(x)^2 - e^{g(x)}g''(x) - \sin x = 0$ da cui si ricava $-1 - g''(0) = 0 \Rightarrow g''(0) = -1$.
   Lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g attorno a 0 sarà dunque $g(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

2. $F(x,y) = e^y - \cos x + \log(1 + x^2y^2)$ in $(0,0)$
   F è di classe C^1 ed è tale che $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = e^y + \frac{2yx^2}{1+x^2y^2}|_{(0,0)} = 1 \neq 0$ dunque per il teorema della funzione implicita l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $y = g(x)$. Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni in cui è definita g.
   $|F(x,0)| = |1 - \cos x| \leq \dfrac{1}{2}x^2 \leq \dfrac{1}{2}r^2$ quindi se vogliamo avere che
   $\sup_{B_r(0)} |F(x,0)| \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|} = \dfrac{\rho}{2}$ (nel nostro caso $T = 1$) si deve prendere $\frac{1}{2}r^2 \leq \frac{\rho}{2} \Rightarrow r \leq \sqrt{\rho}$. Inoltre $\left|1 - \dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = \left|1 - e^y - \dfrac{2x^2y}{1 + x^2y^2}\right| \leq$
   $|1 - e^y| + \dfrac{2x^2|y|}{1 + x^2y^2} \leq 3|y| + 2x^2|y| \leq 3\rho + 2\rho^2 \leq 5\rho$ (se $\rho < 1$) quindi per avere

$\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}$ si deve prendere $\rho \leq \frac{1}{10}$. Dunque possiamo prendere ad esempio $\rho = \frac{1}{10}$ e $r \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$.
Calcoliamo ora lo sviluppo in serie di Taylor di g. Sappiamo che $F(x, g(x)) = e^{g(x)} - \cos x + \log(1 + x^2 g(x)^2) = 0$. Derivando rispetto ad x si ottiene che $e^{g(x)}g'(x) + \sin x + \frac{2xg(x)^2+2g(x)g'(x)x^2}{1+x^2g(x)^2} = 0$ quindi calcolando in 0 ricaviamo $g'(0) = 0$. Derivando nuovamente si ottiene che $e^{g(x)}g'(x)^2 + e^{g(x)}g''(x) + \cos x + 2\frac{g(x)^2+4xg(x)g'(x)+x^2g'(x)^2+x^2g(x)g''(x)}{1+x^2g(x)^2} - 4\frac{(xg(x)^2+g(x)g'(x)x^2)^2}{(1+x^2g(x)^2)^2} = 0$ da cui $g''(0) + 1 = 0 \Rightarrow g''(0) = -1$. Quindi $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

3. $F(x, y) = x\sin(y - \sin y) + y + \log x$ in $(1, 0)$
F è di classe C^1 in un intorno di $(1, 0)$ ed è tale che $F(1, 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = x\cos(y - \sin y)(1 - \cos y) + 1|_{(1,0)} = 1 \neq 0$ dunque per il teorema della funzione implicita l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $y = g(x)$. Inoltre $T = 1$. Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni in cui è definita g. Se $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$ si ha
$|F(x, 0)| = |\log x| = |\log(1 + (x - 1))| \leq 2|x - 1| \leq 2r$ quindi se vogliamo avere che $\sup_{B_r(1)} |F(x, 0)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} = \frac{\rho}{2}$ si deve prendere $r \leq \frac{\rho}{4}$.
Inoltre $\left|1 - \frac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 - x\cos(y - \sin y)(1 - \cos y) - 1| \leq$
$\leq |x\cos(y - \sin y)(1 - \cos y)| \leq \frac{3}{2}|1 - \cos y| \leq \frac{3}{4}y^2 \leq \frac{3}{4}\rho^2$ quindi per avere $\sup_{B_r(1)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}$ si deve prendere $\frac{3}{4}\rho^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \rho \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Dunque $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e $r \leq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Inoltre $F(x, g(x)) = x\sin(g - \sin g) + g + \log x = 0 \Rightarrow \sin(g - \sin g) + x\cos(g - \sin g)(1 - \cos g)g' + g' + \frac{1}{x} = 0$ e dunque per $x = 1$ otteniamo $g'(1) + 1 = 0 \Rightarrow g'(1) = -1$ Derivando nuovamente $\cos(g - \sin g)(1 - \cos g)g' + \cos(g - \sin g)(1 - \cos g)g' - x\sin(g - \sin g)(1 - \cos g)^2g'^2 + x\cos(g - \sin g)\sin g g'^2 + x\cos(g - \sin g)(1 - \cos g)g'' + g'' - \frac{1}{x^2} = 0$ da cui $g''(1) - 1 = 0 \Rightarrow g''(1) = 1$ quindi $g(x) = -(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

4. $F(x_1, x_2, y) = y^2 + \cos(x_1x_2) - 2$ in $(0, 0, 1)$
F è di classe C^1 ed è tale che $F(0, 0, 1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 1) = 2y|_{(0,0,1)} = 2 \neq 0$ dunque per il teorema della funzione implicita l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $y = g(x)$. $T = \frac{\partial F}{\partial y}^{-1} = \frac{1}{2}$ Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni in cui è definita g.
$|F(x_1, x_2, 1)| = |\cos(x_1x_2) - 1| \leq \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2 \leq \frac{1}{2}r^4 \leq \frac{1}{2}r$
(se $r \leq 1$) quindi se vogliamo avere che $\sup_{B_r(0,0)} |F(x_1, x_2, 1)| \leq \frac{\rho}{2\|T\|} = \rho$ si deve prendere $r \leq 2\rho$
Inoltre $\left|1 - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}\right| = |1 - y| \leq \rho$ quindi per avere $\sup_{B_r(0,0)\times B_\rho(1)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}$ si deve prendere $\rho \leq \frac{1}{2}$. Dunque $\rho = \frac{1}{2}$ e $r \leq 1$.
Troviamo ora lo sviluppo di g. Sappiamo che $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) =$

$0 = g^2 + \cos(x_1x_2) - 2$ Derivando rispetto ad x_1 si ottiene che $2gg_{x_1} - x_2\sin(x_1x_2)$ Calolando in $(0,0)$ si ottiene che $g_{x_1}(0,0) = 0$ Allo stesso modo derivando rispetto ad x_2 si ottiene che $2gg_{x_2} - x_1\sin(x_1x_2)$ da cui otteniamo $g_{x_2}(0,0) = 0$. Derivando in tutti i possibili modi le relazioni precedenti otteniamo che
$2g_{x_1}g_{x_1} + 2gg_{x_1x_1} - x_2^2\cos(x_1x_2) = 0$
$2g_{x_2}g_{x_1} + 2gg_{x_1x_2} - \sin(x_1x_2) - x_1x_2\cos(x_1x_2) = 0$
$2g_{x_2}g_{x_2} + 2gg_{x_2x_2} - x_1^2\cos(x_1x_2) = 0$
Calcolando in $(0,0)$ si ottiene che $g_{x_1x_1}(0,0) = 0 = g_{x_2x_2}(0,0) = g_{x_1x_2}(0,0)$ quindi $g(x_1,x_2) = 1 + o(x_1^2 + x_2^2)$

5. $F(x_1,x_2,y) = \sin(yx_1x_2 + \pi y) + \arctan x_1x_2$ in $(0,0,0)$
F è di classe C^1 ed è tale che $F(0,0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = (x_1x_2 + \pi)\cos(yx_1x_2 + \pi y)|_{(0,0,0)} = \pi \neq 0$ dunque per il teorema della funzione implicita l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $y = g(x)$. Stimiamo i raggi r e ρ degli intorni in cui è definita g. Poniamo $T = \frac{\partial F}{\partial y}^{-1} = \frac{1}{\pi}$
$|F(x_1,x_2,0)| = |\arctan(x_1x_2)| \le |x_1x_2| \le \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \le \dfrac{1}{2}r^2$ quindi se vogliamo avere che $\sup\limits_{B_r(0,0)} |F(x_1,x_2,0)| \le \dfrac{\rho}{2\|T\|} = \dfrac{\pi\rho}{2}$ si deve prendere $\frac{1}{2}r^2 \le \frac{\rho\pi}{2} \Rightarrow r \le \sqrt{\pi\rho}$. Inoltre
$\left|1 - \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| = \left|1 - \dfrac{1}{\pi}x_1x_2\cos(yx_1x_2 + \pi y) - \cos(yx_1x_2 + \pi y)\right| \le$
$|1 - \cos(yx_1x_2 + \pi y)| + \dfrac{1}{\pi}|x_1x_2||\cos(yx_1x_2 + \pi y)| \le \dfrac{1}{2}y^2(\pi + x_1x_2)^2 +$
$+\dfrac{1}{2\pi}(x_1^2 + x_2^2) \le 8y^2 + \dfrac{1}{2\pi}r^2 \le 8\rho^2 + \dfrac{1}{2\pi}\pi\rho \le 8\rho + \dfrac{1}{2}\rho = \dfrac{17}{2}\rho$
quindi per avere $\sup\limits_{B_r(0,0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le \dfrac{1}{2}$ possiamo prendere $\rho \le \frac{1}{17}$.
Dunque possiamo prendere $\rho = \frac{1}{17}$ e $r \le \sqrt{\frac{\pi}{17}}$.
Troviamo ora lo sviluppo di g. $F(x_1,x_2,g(x_1,x_2)) = \sin(g(x_1x_2+\pi)) + \arctan x_1x_2 = 0$ Derivando rispetto ad x_1 ed x_2 otteniamo che
$\cos(g(x_1x_2 + \pi))(g_{x_1}(x_1x_2 + \pi) + gx_2) + \frac{x_2}{1+x_1^2x_2^2} = 0$
$\cos(g(x_1x_2 + \pi))(g_{x_2}(x_1x_2 + \pi) + gx_1) + \frac{x_1}{1+x_1^2x_2^2} = 0$ Da cui si ricava che $g_{x_1}(0,0) = g_{x_2}(0,0) = 0$ Derivando ulteriormente si ottiene che
$-\sin(g(x_1x_2+\pi))(g_{x_1}(x_1x_2+\pi)+gx_2)^2+\cos(g(x_1x_2+\pi))(g_{x_1x_1}(x_1x_2+\pi) + 2g_{x_1}x_2) - \frac{2x_1x_2^3}{(1+x_1^2x_2^2)^2} = 0$
$-\sin(g(x_1x_2+\pi))(g_{x_1}(x_1x_2+\pi)+gx_2)(g_{x_2}(x_1x_2+\pi)+gx_1)+\cos(g(x_1x_2+\pi)(g_{x_1x_2}(x_1x_2 + \pi) + g_{x_1}x_1 + g_{x_2}x_2 + g) + \frac{1-x_1^2x_2^2}{(1+x_1^2x_2^2)^2} = 0$
$-\sin(g(x_1x_2+\pi))(g_{x_2}(x_1x_2+\pi)+gx_1)^2+\cos(g(x_1x_2+\pi))(g_{x_2x_2}(x_1x_2+\pi) + 2g_{x_2}x_1) - \frac{2x_2x_1^3}{(1+x_1^2x_2^2)^2} = 0$
Da cui si ricava che $g_{x_1x_1}(0,0) = g_{x_2x_2}(0,0) = 0$ e $g_{x_1x_2}(0,0) = \frac{1}{\pi}$
Dunque $g(x_1,x_2) = -\frac{1}{\pi}x_1x_2 + o(x_1^2 + x_2^2)$

Esercizio 2 $F(x,y) = 2y^6 - \sin^3 x$ Notiamo che F è di classe C^1 e che $\nabla F(x,y) = (-3\sin^2 x\cos x, 12y^5)$. $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$ quindi non si può usare il teorema della funzione implicita. Notiamo che intorno a $(0,0)$ $2y^6 - \sin^3 x = 0 \Longrightarrow x = \arcsin(\sqrt[3]{2}y^2)$ quindi l'insieme $\{F = 0\}$ è almeno localmente il grafico di una funzione di classe C^1

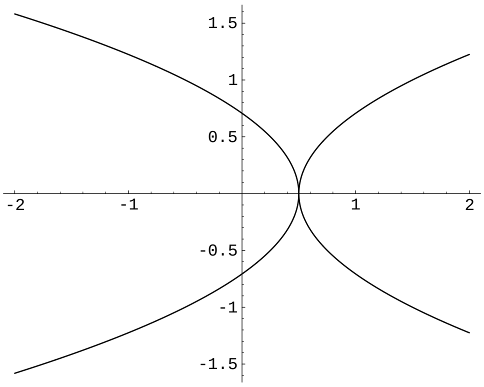
Esercizio 3 $F(x,y) = y^4 - x^2 + x$

$\nabla F(x,y) = (1-2x, 4y^3) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$

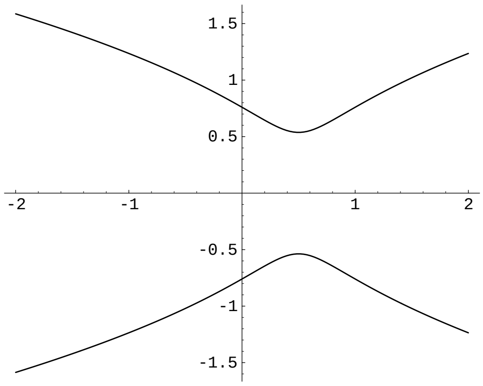
$F(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$. Per $c \neq \frac{1}{4}$ la curva Γ_c non contiene punti in cui il gradiente di F si annulla e quindi è localmente un grafico cartesiano. Cerchiamo di disegnare Γ_c al variare di c

$y^4 - x^2 + x = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{x^2 - x + c}$

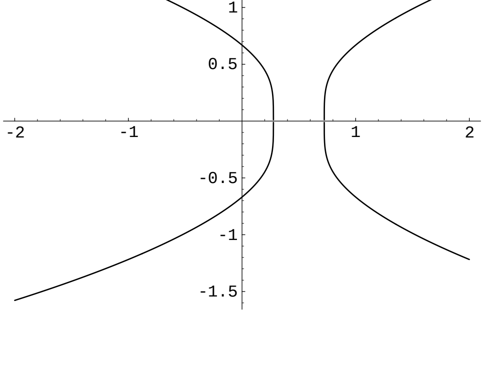
-Se $c = \frac{1}{4}$ abbiamo che $y = \pm\sqrt[4]{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\left|x - \frac{1}{2}\right|}$ Notiamo in particolare che $\Gamma_{\frac{1}{4}}$ ha un nodo e quindi non è una curva regolare



-Se $c > \frac{1}{4}$ abbiamo che $x^2 - x + c > 0\ \forall x$. in questo caso la funzione $\sqrt[4]{x^2 - x + \frac{1}{4}}$ è definita per ogni valore di x e quindi Γ_c è composta da due curve regolari disgiunte



-Se $c < \frac{1}{4}$ si ha che $x^2 - x + c > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \vee x < \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$



Esercizio 4 $F(x,y) = (x^3 + x, \arctan y - e^{x^2})$

1. Per dimostrare che F è invertibile mostriamo che F è iniettiva
$F(x,y) = F(x',y') \Rightarrow x^3 + x = x'^3 + x' \wedge \arctan y - e^{x^2} = \arctan y' - e^{x'^2}$
$\Rightarrow x = x' \wedge y = y'$
2. $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & 0 \\ -2xe^{x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det JF(x,y) = \dfrac{3x^2+1}{1+y^2} \neq 0$ Dunque f è una funzione iniettiva (invertibile) di classe C^1 e JF è una matrice invertibile quindi F^{-1} è di classe C^1 in $F(\mathbb{R}^2)$
3. Sappiamo che $JF^{-1}(F(x,y)) = (JF(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+y^2} & 2xe^{x^2} \\ 0 & 3x^2+1 \end{pmatrix}$
In particolare nel punto $(0,-1) = F(0,0)$ avremo che
$JF^{-1}(0,-1) = (JF(0,0))^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5 Sia $A \in Mat(n \times m)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tale che $|x| \leq 1$ si ha che $|Ax|^2 = \left| \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i^2 \right| =$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^2 \right) \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|A\|_\infty^2 = nm\|A\|_\infty^2$$ quindi

$|Ax| \leq \sqrt{nm}\|A\|_\infty$. Poichè questo è vero $\forall x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \leq 1$ si ha che $\|A\| \leq \sqrt{nm}\|A\|_\infty$

Esercizio 6 $F(x, y_1, y_2) = ((x+1)\arctan y_1, e^{-y_1} \sin 2y_2 + \cos(\frac{\pi}{2} + x))$

Dobbiamo cercare r e ρ in modo tale che $\sup_{B_r(0)} |F(x,0,0)| \leq \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ e $\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0,0)} \left\| 1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y} \right\| \leq \dfrac{1}{2}$. Per l'esercizio precedente ci basta prendere r e ρ in modo tale che $\sup_{B_r(0)} |F(x,0,0)| \leq \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty}$ e $\sup_{B_r(0)\times B_\rho(0,0)} \left\| 1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y} \right\|_\infty \leq \dfrac{1}{4}$

$F(0,0,0) = (0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{1+y_1^2} & 0 \\ -e^{-y_1}\sin 2y_2 & 2e^{-y_1}\cos y_2 \end{pmatrix}$ in particolare

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ che è una matrice invertibile con inversa

$T = \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\|T\|_\infty = 1)$

$|F(x,0,0)| = |(0, \cos(\dfrac{\pi}{2} + x))| = |\cos(\dfrac{\pi}{2} + x)| = |\sin x| \leq |x| \leq r$ quindi se vogliamo $\sup_{B_r(0)} |F(x,0,0)| \leq \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty} = \dfrac{\rho}{4}$ possiamo prendere $r \leq \frac{\rho}{4}$. Inoltre

$$\|Id - T\tfrac{\partial F}{\partial y}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+1}{1+y_1^2} & 0 \\ -e^{-y_1}\sin 2y_2 & 2e^{-y_1}\cos y_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 - \frac{x+1}{1+y_1^2} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-y_1}\sin 2y_2 & 1 - e^{-y_1}\cos y_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$ Ma

$\left|1-\frac{x+1}{1+y_1^2}\right| \leq |\frac{y_1^2-x}{1+y_1^2}| \leq |y_1|+|x| \leq \rho+r \leq \rho+\frac{\rho}{4}=\frac{5}{4}\rho$
$|\frac{1}{2}e^{-y_1}\sin 2y_2| \leq 3|y_2| \leq 3\rho$
$|1-e^{-y_1}\cos y_2| \leq |1-e^{-y_1}|+e^{-y_1}|1-\cos y_2| \leq 3|y_1|+\frac{3}{2}|y_2|^2 \leq 3\rho+\frac{3}{2}y_2 \leq \frac{9}{2}\rho$
Quindi $\|Id-T\frac{\partial F}{\partial y}\|_\infty \leq \frac{9}{2}\rho$ Possiamo quindi prendere $\rho=\frac{1}{18}$ e $r \leq \frac{1}{72}$