Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM2 Soluzioni tutorato 3

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: G. Mancini
Tutorato 3 del 29 ottobre 2007

Esercizio 1

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$
   Il limite non esiste perchè ad esempio lungo la retta $y = x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ mentre lungo la retta $y = 0$ la funzione è nulla

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
   $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Passando in cordinate polari
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho)}{\rho} = 1$$

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x^2+y^5)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $$\left|\frac{xy+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x^2+y^5)}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} + |\cos(x^2+y^5) - 1| \leq$$
   $\leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} + |\cos(x^2+y^5) - 1| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ quindi
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x^2+y^5)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+xy+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $$\left|\frac{\sin(x^2+xy+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x^2+xy+y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$
   $$\leq \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

6. $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{\sin x^2y}{x^2+y^2}$
   $\left|\frac{\sin x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ quindi $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{\sin x^2y}{x^2+y^2} = 0$

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+3y^4}$

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^4+3y^4}\right| \le \frac{|x|}{x^4+3y^4}|xy^3| \le \frac{|x|}{x^4+3y^4}(\frac{x^4}{4}+\frac{3y^4}{4}) \le \frac{1}{4}|x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4+3y^4} = 0$

Esercizio 2

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$

   Se $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è di classe C^1 (e quindi è differenziabile) dunque studiamo la funzione solo in $(0,0)$.

   f non è continua in $(0,0)$ perchè $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ quindi non è neanche differenziabile. Le derivate parziali di f in $(0,0)$ esistono e

   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$

   $\forall\, v = (h,k) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ si ha che

   $$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk)-f(0.0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\frac{hk}{h^2+k^2} = \begin{cases} +\infty \text{ se } hk > 0 \\ -\infty \text{ se } hk < 0 \\ 0 \text{ se } hk = 0 \end{cases}$$

   Quindi esistono solo le derivate direzionali nelle direzioni degli assi cartesiani

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$

   Se $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è di classe C^1 (e quindi è differenziabile) dunque studiamo la funzione solo in $(0,0)$.

   f è continua in $(0,0)$ perchè $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}\right| \le \dfrac{(x^2+y^4)y^2}{x^2+y^4} = y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

   Inoltre ammette derivate parziali e tutte le derivate direzionli perchè

   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ e $\forall\, v = (h,k) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ si ha che

   $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(th,tk)-f(0.0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} t\dfrac{h^2k^2}{h^2+t^2k^4} = 0$

   Infine f è differenziabile perchè

   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-<\nabla f(0,0),(h,k)>}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \text{ in quanto}$$

   $$\frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{(h^2+k^4)(h^2+k^2)}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} \le \sqrt{h^2+k^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

3. $f(x,y) = \begin{cases} x^2y\sin\frac{1}{y} \text{ se } y \neq 0 \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$

   Se $y \neq 0$ la funzione è di classe C^1 dunque studiamo la funzione solo nei punti della forma $(x_0,0)$.

   f è continua in tutti i punti della forma $(x_0,0)$ perchè

   $\left|x^2y\sin\dfrac{1}{y}\right| \le x^2|y| \overset{(x,y)\to(x_0,0)}{\longrightarrow} 0$

   f è parzialmente derivabile in x in tutti i punti della forma $(x_0,0)$ perchè

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,0)-f(x_0,0)}{t}=0\ \forall\ \in\mathbb{R}$$
ma ammette la derivata parziale in y solo in $(0,0)$ infatti
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,t)-f(x_0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}x_0^2\sin\frac{1}{t}=\begin{cases}0 \text{ se } x_0=0\\ \nexists \text{ se } x_0\neq 0\end{cases}$$
f ammette tutte le derivate direzionali solo in (0,0) infatti $\forall\ v=(h,k)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$ si ha che
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+th,tk)-f(x_0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(x_0+th)^2tk\sin\frac{1}{tk}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}(x_0+th)^2k\sin\frac{1}{tk}=\begin{cases}0 \text{ se } x_0=0\\ 0 \text{ se } k=0\\ \nexists \text{ se } x_0\neq 0 \text{ e } k\neq 0\end{cases}$$
Siccome non ammette la derivata parziale in y la funzione non può essere differenziabile nei punti della forma $(x_0,0)$ con $x_0\neq 0$ Tuttavia la funzione è differenziabile in $(0,0)$ infatti
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-<\nabla f(0,0),(h,k)>}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k\sin\frac{1}{k}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}|k|=0$$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{altrimenti}\end{cases}$

La funzione è continua nell'origine infatti
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho^2}{\rho^2}=1$$
la funzione ammette derivate parziali nell'origine perchè
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t^2}{t^2}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t^2-t^2}{t^3}=$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{2t\cos t^2-2t}{3t^2}=\lim_{t\to 0}2t^3\frac{cost^2-1}{3t^4}=0 \qquad \text{e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t^2}{t^2}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t^2-t^2}{t^3}=0$$
la funzione ammette anche tutte le derivate direzionali perchè $\forall\ v=(h,k)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$ si ha che
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{sin(t^2(h^2+k^2))}{t^2(h^2+k^2)}-1}{t}=$$
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t^2(h^2+k^2))-t^2(h^2+k^2)}{t^3(h^2+k^2)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t\cos(t^2(h^2+k^2))-2t}{3t^2}=0$$
Infine f è differenziabile in$(0,0)$ perchè si ha
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-<\nabla f(0,0),(h,k)>}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{\frac{\sin(h^2+k^2)}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho^2-\rho^2}{\rho^3}=0$$

Esercizio 3 1. $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Possiamo estendere f con continuità ponendo $f(0,0)=0$ perchè $|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$

Sappiamo che f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ e che per $(x,y)\neq(0,0)$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
Inoltre la funzione ammette derivate parziali nell'origine
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ e
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$
Notiamo però che le derivate parziali di f non sono continue nell' oigine perchè ad esempio
$\lim_{x\to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} - \frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0$

2. $f(x,y) = \frac{x\log(1+y^4)}{x^6+y^2}$ Possiamo estendere f con continuità ponendo $f(0,0)=0$ perchè $|f(x,y)| \le \frac{|x|y^4}{x^6+y^2} \le |x|(x^6+y^2) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$
Sappiamo che f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e che per $(x,y)\neq(0,0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\log(1+y^4)}{x^6+y^2} - \frac{6x^6\log(1+y^4)}{(x^6+y^2)^2}$ e
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4xy^3}{(1+y^4)(x^6+y^2)} - \frac{2xy\log(1+y^4)}{(x^6+y^2)^2}$
Inoltre la funzione ammette derivate parziali nell'origine
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ e
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ Notiamo che entrambe le derivate parziali sono continue nell'origine infatti
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le \frac{\log(1+y^4)}{x^6+y^2} + \frac{6x^6\log(1+y^4)}{(x^6+y^2)^2} \le \frac{y^4}{x^6+y^2} + \frac{6x^6y^4}{(x^6+y^2)^2} \le \frac{(x^6+y^2)^2}{x^6+y^2} + 6\frac{(x^6+y^2)(x^6+y^2)^2}{(x^6+y^2)^2} \le 7(x^6+y^2) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \frac{4|x||y|^3}{(1+y^4)(x^6+y^2)} + \frac{2|x||y|\log(1+y^4)}{(x^6+y^2)^2} \le \frac{4|x|(x^6+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6+y^2} +$
$+2|x||y|\frac{y^4}{(x^6+y^2)^2} \le 4|x|\sqrt{x^6+y^2} + 2|x||y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$
Quindi f si può estendere ad una funzione di classe C^1

Esercizio 4 1. $f(x,y) = |xy|^\alpha$
Se $\alpha = 0$ la funzione si può estendere nell'origine alla funzione che vale costantemente 1 quindi supponiamo che $\alpha \neq 0$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$
dunque f è continua solo per $\alpha > 0$. Le derivate parziali nell' origine sono
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$
vediamo ora per quali valori di α la funzione è differenziabile
$\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)- < \nabla f(0,0),(h,k) >}{\sqrt{h^2+k^3}}\right| = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{(h^2+k^2)^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} = (h^2+k^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ se $\alpha > \frac{1}{2}$

Inoltre se $\alpha \leq \frac{1}{2}$ si ha che
$$\left|\frac{f(h,h) - f(0,0) - < \nabla f(0,0), (h,h) >}{\sqrt{2h^2}}\right| = \frac{|h|^{2\alpha}}{\sqrt{2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|h|^{2\alpha-1} =$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty \text{ se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$
Dunque la funzione è differenziabile $\iff \alpha > \frac{1}{2}$

2. $f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}$ Notiamo che $|f(x,x)| = \dfrac{1}{2^\gamma}|x|^{\alpha+\beta-2\gamma} =$
$$= \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha+\beta-2\gamma > 0 \\ 1 \text{ se } \alpha+\beta-2\gamma = 0 \\ +\infty \text{ se } \alpha+\beta-2\gamma < 0 \end{cases}$$
Inoltre se $\alpha+\beta-2\gamma > 0$ si ha che $|f(x,y)| = \dfrac{|x|^\alpha |y|\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} \leq$
$\leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\gamma} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ Dunque la funzione è continua se $\alpha+\beta-2\gamma > 0$
Le derivate parziali di f sono entrambe nulle infatti
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$
Infine per quanto riguarda la differenziabilità osserviamo che
$$\left|\frac{f(h,h) - f(0,0) - < \nabla f(0,0), (h,h) >}{\sqrt{2h^2}}\right| = \frac{|h|^{\alpha+\beta}}{(2h^2)^{\gamma+\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{1}{2^{\gamma+\frac{1}{2}}}|h|^{\alpha+\beta-2\gamma-1} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha+\beta-2\gamma = 1 \\ \infty \text{ se } \alpha+\beta-2\gamma < 1 \end{cases}$$
mentre se $\alpha+\beta-2\gamma > 1$ si ha
$$\left|\frac{f(h,k) - f(0,0) - < \nabla f(0,0), (h,k) >}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{(\sqrt{h^2+k^2})^{2\gamma+1}} \leq$$
$$(\sqrt{h^2+k^2})^{\alpha+\beta-2\gamma-1} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$
Dunque la funzione è differenziabile solo se $\alpha+\beta-2\gamma > 1$

Esercizio 5 Se f è continua e strettamente positiva allora la funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}^n$ Inoltre si ha che $\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = +\infty$ dunque g è coerciva. Ma una funzione continua e coerciva su un insieme chiuso ($\mathbb{R}^n$ è un chiuso) ha un punto di minimo assoluto cioè $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $g(x_0) = M$ con $M \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $g(x) = \frac{1}{f(x)} \geq M \implies f(x) \leq \frac{1}{M} \forall x \in \mathbb{R}^n$ e che $f(x_0) = \frac{1}{M}$ dunque x_0 è un punto di massimo assoluto per f.

$f(x,y) = \dfrac{e^{\frac{1}{1+y^2}}}{1+x^2+y^2+\log(2+3x^4)}$ Notiamo che f è strettamente positiva e continua su tutto $\mathbb{R}^n$ e che
$\dfrac{e^{\frac{1}{1+y^2}}}{1+x^2+y^2+\log(2+3x^4)} \leq \dfrac{e}{1+x^2+y^2} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi f verifica tutte le ipotesi richieste. In questo caso inoltre è facile vedere che $f(x,y) \leq \frac{e}{1+\log 2} = f(0,0)$ quindi il massimo di f è $\frac{e}{1+\log 2}$