AM2: Tracce delle lezioni- Settimana 12

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $\mathcal{A} = (a_{ij}), \quad i,j = 1,\ldots,n$ matrice $n \times n$. Le soluzioni del sistema differenziale lineare di n equazioni nelle n incognite $x_i(t)$

$$(*) \qquad \dot{x} = \mathcal{A}x, \quad \text{ovvero} \qquad \dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t), \quad i = 1,\ldots,n$$

sono definite per tutti i tempi.

Segue da $\|\mathcal{A}x\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|$ e dalla Proposizione 3.

NOTA. Lo stesso vale per sistemi lineari a coefficenti variabili e continui, cioé se $a_{ij} = a_{ij}(t), \quad a_{ij} \in C(I), \forall i,j, I$ intervallo in $\mathbf{R}$. Infatti ogni sistema non autonomo, ove cioé il campo $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ dipenda esplicitamente dalla variabile indipendente t, ovvero ogni sistema della forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t) \qquad t \in \mathbf{R}$$

si puó scrivere, equivalentemente, come sistema autonoma introducendo un nuovo campo $\hat{f} \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ cosí definito

$$\hat{f}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = (f_1(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}),1)$$

Evidentemente, $\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t),\ldots,x_n(t),t), \quad x_i(t_0) = c_i, \quad i = 1,\ldots,n \quad \Leftrightarrow$

$$\dot{x}_i(t) = \hat{f}_i(x_1(t),\ldots,x_n(t),x_{n+1}(t)), \quad i = 1,\ldots,n, \quad \dot{x}_{n+1}(t) = 1,$$
$$x_i(t_0) = x_i, \quad i = 1,\ldots,n, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0.$$

Proposizione 4 L'insieme di tutte le soluzioni di $(*)$, cioé

$$\mathcal{N} := \{x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : \quad \dot{x} = \mathcal{A}x\}$$

é un sottospazio linare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione n.

Il fatto, evidente, che **combinazioni lineari** $\alpha x(t) + \beta y(t)$ di soluzioni sia ancora soluzione si traduce nella linearitá dell'insieme delle soluzioni. Poi, dire che $\mathcal{N}$ ha dimensione n equivale a dire che

1. Esistono n soluzioni $x^i \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, $\quad i = 1, \ldots, n$ **linearmente indipendenti**, cioé tali che

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

2. Le x^i **generano $\mathcal{N}$**, cioé

$$\forall x \in \mathcal{N}, \quad \text{esistono costanti} \quad c_1, \ldots, c_n \quad \text{tali che} \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = 0 \quad \forall t$$

Basta prendere x^i nel modo seguente: fissati n vettori $v^i \in \mathbf{R}^n$ linearmente indipendenti , x^i é la soluzione di $(*)$ soddisfacente la condizione iniziale $x^i(0) = v^i$. Chiaramente le x^i sono linearmente indipendenti. Poi, se x é soluzione, siano $c_i \in \mathbf{R}$ tali che $x(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i v^i = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(0)$ e sia $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t)$. Siccome x e $\hat{x}$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy, allora $x \equiv \hat{x}$ (per il Teorema di Picard).

Definizione Un sistema di n soluzioni linearmente indipendenti x^i di $(*)$ é **sistema fondamentale** per $(*)$ e $\quad X(t) = (x^i, \ldots, x^n) = (x^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ é **matrice fondamentale**. Se $X(0)$ é la matrice identitá, cioé $X(0) = (e_1, \ldots, e_n)$ ovvero $x^i_j(0) = \delta_{ij}$, $\quad X$ é **matrice principale**.

Notiamo che se x^i é sistema fondamentale allora ogni soluzione x di $(*)$ si scrive come combinazione lineare delle x^i:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t), \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad \textbf{(Integrale Generale)}$$

e, se X é matrice principale $\quad X(t)c, \qquad c = (c_1, \ldots, c_n) \quad$ é la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = c$.

Definizione. Siano $x^i, i = 1, \ldots, n$ soluzioni di $(*)$ e $X(t) := (x^1, \ldots, x^n) = (x^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$. Allora

$$W(t) := \det X(t)$$

é il determinante **Wronskiano** delle x^i.

Proposizione 5 Siano x^i n soluzioni di $(*)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(i) $\quad x^i$ é sistema fondamentale
(ii) $\quad W(t) \neq 0 \, \forall t$
(iii) $\quad$ esiste t_0 tale che $W(t_0) \neq 0$

Prova. (i) implica (ii). Infatti, se no, esiste t_0 tale che $W(t_0) = 0$ e quindi i vettori $x^i(t_0)$ sono linearmente dipendenti, cioé esistono costanti c_i non tutte nulle tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t_0) = 0$. Ora, se $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$, $\hat{x}$ é soluzione che si annulla in t_0, e quindi, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy, $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = \hat{x} \equiv 0$, cioé le x^i sono linearmente dipendenti.
(ii) implica ovviamente (iii).
(iii) implica (i). Infatti, se no, esistono c_i tale che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = 0$ per tutti i t e quindi anche per $t = t_0$, contraddicendo il fatto che i vettori di $\mathbf{R}^n$ dati da $x^i(t_0)$ sono lineamente indipendenti perché a determinante diverso da zero.

NOTA. Quanto sopra continua a valere anche per sistemi lineari a coefficenti variabili.

RIDUZIONE A FORMA CANONICA

Sia e_i, $i = 1, \dots, n$ base canonica di $\mathbf{R}^n$. Sia $\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ (matrice diagonale avente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ come elementi sulla diagonale principale). Il (piú semplice) sistema differenziale

$$\dot{x} = \mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)x \qquad x(t) = ((x_1(t), \dots, x_n(t))$$

é formato dalle n equazioni disaccoppiate

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Il sistema ammette quindi le soluzioni

$$x^i = e^{\lambda_i t} e_i$$

Queste soluzioni sono a Wronskiano diverso da zero e quindi **formano un sistema fondamentale** e ogni soluzione é della forma

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t}\right), \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad \textbf{(Integrale Generale)}$$

Se $\mathcal{A}$ ha n **autovalori reali distinti**, allora $\mathcal{A}$ **ha una base di autovettori** $v^i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \dots, n$. Proviamo che l'Integrale Generale del sistema $\dot{x} = \mathcal{A}x$ si scrive

$$\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i, \qquad c_i \in \mathbf{R}$$

A tale scopo, introduciamo la matrice avente come colonne gli autovettori

$$\mathcal{P} := \left(v^1, \dots, v^n\right) = \left(v_j^i\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Siccome i vettori v^i sono linearmente indipendenti, $\mathcal{P}$ é invertibile. Verifichiamo dapprima che $\mathcal{A}$ si puó ricondurre alla **forma canonica**

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Infatti,

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_i = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v^i = \lambda_i \mathcal{P}^{-1}v^i = \lambda_i e_i$$

ovvero $\lambda_i e_i$ é la i-esima colonna di $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$.
Ma allora, se $\dot{x} = \mathcal{A}x$ e $y := \mathcal{P}^{-1}x$, é $x = \mathcal{P}y$ e $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x}$ e quindi

$$\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y$$

e quindi $y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i$ e quindi **l'integrale generale di** $\dot{x} = \mathcal{A}x$ si scrive appunto $\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i$.

Supponiamo adesso che $\mathcal{A}$ abbia ancora tutti **autovalori distinti**, ma che abbia q **autovalori reali** μ_i, $i = 1, \ldots, q$ **e** $2p \geq 2$ **autovalori complessi ,** $q + 2p = n$ (notiamo che se $\lambda = \alpha + i\beta$ é autovalore complesso allora anche $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo é, perché $\mathcal{A}$ é matrice di numeri reali e quindi il suo polinomio caratteristico é a coefficenti reali).
Siano $\lambda_j, \overline{\lambda}_j$ $j = 1, \ldots, p$ e μ_i, $i = 1, \ldots, q$ gli autovalori complessi e, rispettivamente, reali, di $\mathcal{A}$. A tali autovalori corrispondono n autovettori linearmente indipendenti, diciamo v^j, $\overline{v}^j$, $j = 1, \ldots, p$, u^i, $i = 1, \ldots, q$: notiamo che mentre $u^i \in \mathbf{R}^n$, i v^j sono vettori in $\mathbf{C}^n$ (vettori a componenti complesse) e compaiono in coppie complesse coniugate giacché $\mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j \Leftrightarrow \mathcal{A}\overline{v}^j = \overline{\lambda}_j \overline{v}^j$ (la lineare indipendenza sussiste, nei fatti, in $\mathbf{C}^n$). Posto $\xi^j := \Re v^j, \eta^j := \Im v^j$ (ovvero $v^j = \xi^j + i\eta^j$, $\xi^j, \eta^j \in \mathbf{R}^n$), é

$$\mathcal{A}\xi^j + i\mathcal{A}\eta^j = \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j = (\alpha_j + i\beta_j)(\xi^j + i\eta^j) = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j + i(\beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j) \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}\xi^j = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j, \qquad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j$$

Sia ora

$$\mathcal{P} := \left(\xi^1, \eta^1, \ldots, \xi^p, \eta^p, u^1, \ldots u^q\right)$$

la matrice ($n \times n$ reale) avente le prime $2p$ colonne formate dai vettori parte reale e coefficente dell'immaginario degli autovettori corrispondenti ai λ_i e le rimanenti q colonne formate dagli autovettori reali. Ovviamente tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi $\mathcal{P}$ é invertibile. Mostriamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} =$$

$$(\alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2, \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \ldots, \alpha_p e_p - \beta_p e_{p+1}, \beta_p e_p + \alpha_p e_{p+1}, \quad \mu_1 e_{2p+1}, \ldots, \mu_q e_n)$$

($\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é qui, come altrove, descritta come n-upla di vettori colonna). É questa la **forma canonica di $\mathcal{A}$ in presenza di autovalori distinti, reali o complessi**. Verifichiamolo:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\xi^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\alpha_1\xi^1 - \beta_1\eta^1\right) = \alpha e_1 - \beta_1 e_2$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\eta^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\beta_1\xi^1 + \alpha_1\eta^1\right) = \beta e_1 + \alpha_1 e_2$$

e cosí via fino alle colonne di posto $2p-1$ e $2p$.
Per le rimanenti si trova invece $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_{2p+i} = \mu_i e_{2p+i}$.
Posto $y = (x,\xi,\eta) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, il sistema $\quad \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y \quad$ si disaccoppia nelle q equazioni

$$\dot{x}_i = \mu_i x_i \qquad i = 1,\ldots,q$$

e nei p sistemi 2×2

$$\dot{\xi}_j = \alpha_j\xi_j - \beta_j\eta_j, \qquad \dot{\eta}_j = \beta_j\xi_j + \alpha_j\eta_j, \qquad \xi_j,\eta_j \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \qquad j = 1,\ldots,p$$

Posto $\quad z_j(t) := \xi_j(t) + i\eta_j(t), \qquad \dot{z}_j := \dot{\xi}_j + i\dot{\eta}_j,\quad$ il sistema si riscrive come

$$\dot{z}_j = (\alpha_j + i\beta_j)z_j$$

che ha le soluzioni

$$z_j = c\exp(\alpha_j t + i\beta_j t) = ce^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t + i\sin\beta_j t), \quad c \in \mathbf{C}$$

Prendendo $c = 1, c = i$ otteniamo coppie di soluzioni in forma reale

$$\xi_j = e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, \qquad \eta_j = e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t, \qquad \xi_j = e^{\alpha t_j}\sin\beta_j t, \quad \eta_j = -e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t$$

Si ottiengono cosí $2p+q$ soluzioni che, come é immediato verficare, sono a Wronskiano diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale per il sistema in forma canonica e che, applicando $\mathcal{P}$, fornisce un sistema fondamentale per il sistema dato $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Piú in generale, se $\mathcal{P}$ é matrice invertibile e $\quad \sum_{i=1}^n c_i y^i \quad$ é Integrale Generale di $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y, \quad$ allora

$$\sum_{i=1}^n c_i\mathcal{P}y^i$$

é Integrale Generale di $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x$.

Si tratta allora di trovare una matrice $\mathcal{P}$ che riduca $\mathcal{A}$ nella forma piú semplice possibile, la sua **forma canonica**.
Cosí abbiamo proceduto nel caso diagonalizzabile. Si puó procedere in questo modo

anche quando, a causa della presenza di autovalori multipli, fosse impossibile diagonalizzare $\mathcal{A}$ (ricordiamo che anche in presenza di autovalori multipli $\mathcal{A}$ puó avere n autovettori linearmente indipendenti e quindi essere diagonalizzabile: é questo il caso se $\mathcal{A}$ é simmetrica).
In tali casi la forma canonica risulterá peró piuttosto complicata (forme di Jordan).

Ci limitiamo a considerare il caso

$\mathcal{A}$ ha **un solo autovalore, reale, cui corrisponde un unico autovettore**.

Cominciamo dalla situazione piú semplice, cioé $n = 2$.
Sia dunque λ zero di molteplicitá 2 (**molteplicitá algebrica** di λ) del polinomio caratteristico di $\mathcal{A}$, matrice 2×2 . Se la **molteplicitá geometrica** di λ, ovvero $\dim(\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}))$ é uguale alla molteplicitá algebrica di λ (cioé é 2) cioé a λ corrispondono due autovettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{A}$ é, come sopra, diagonalizzabile.
Supponiamo quindi che λ abbia **un unico autovettore** v. Ció implica che

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{h \in \mathbf{R}^2 : \quad \exists u \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tale che} \quad \mathcal{A}u - \lambda u = h\}$$

é un sottospazio di dimensione 1: $Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tu : \, t \in \mathbf{R}\}$ per qualche $u \neq 0$.
Di piú,

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tv : \, t \in \mathbf{R}\}$$

Questo perché $\mathcal{A}u - \lambda u = tu \Rightarrow \mathcal{A}u - (\lambda + t)u = 0$ e quindi $t = 0$ (λ é l'unico autovalore !) e quindi u é un multiplo di v (v é l'unico autovettore !)
Dunque esiste u tale che $\mathcal{A}u - \lambda u = v$. In particolare, $u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2$ ed u si dice **autovettore generalizzato**. Sia ora

$$\mathcal{P} = (v, u)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore e l'autovettore generalizzato; ovviamente $\mathcal{P}$ é invertibile. Si ha

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v = \mathcal{P}^{-1}\lambda v = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u + v) = \lambda e_2 + e_1$$

Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2)$$

É questa la **forma canonica** di $\mathcal{A}$. Il sistema associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{x} = \lambda x + y, \qquad \dot{y} = \lambda y$$

Una soluzione di tale sistema é $y \equiv 0, x = e^{\lambda t}$. Una seconda soluzione é $y = e^{\lambda t}$ e quindi $(xe^{-\lambda t})' = 1$ e quindi $x = te^{\lambda t}$. Tali soluzioni sono a Wronskiano non nullo e quindi formano un sistema fondamentale. Dunque un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$ é dato da

$$\mathcal{P}\left(e^{\lambda t}e_1\right) = e^{\lambda t}v, \qquad \mathcal{P}\left(te^{\lambda t}e_1 + e^{\lambda t}e_2\right) = te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$$

Argomenti analoghi si applicano al caso piú generale in cui la matrice $n \times n$ $\mathcal{A}$ **ha un unico autovalore** λ (avente quindi **molteplicitá algebrica** n) avente **molteplicitá geometrica** 1, cioé $\mathcal{A}u = \lambda u$ ha una sola soluzione u_1 (a meno di multipli).
La proprietá chiave (che sussiste in effetti senza ipotesi sulla molteplicitá geometrica di λ e che diamo senza dimostrazione) é la seguente:

$$(!) \qquad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n = \mathbf{R}^n \qquad (!)$$

1. Una conseguenza di (!) é che

$$Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = \mathbf{R}^n$$

Infatti, $u \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2} \Rightarrow 0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\mathcal{A}u - \lambda u)$
$\Rightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u - \lambda u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$.

2. Una conseguenza di $\quad dim\,[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})] = 1 \quad$ é che

$$(+) \qquad dim\left[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] = dim\left[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k\right] + 1$$

se $\quad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$ é sottospazio proprio di $Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}$. Infatti, da

$$\exists u : \qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = 0, \qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(u) \neq 0$$

segue

$$0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(u) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\alpha u) = u_1$$

per qualche $\alpha \neq 0$. Ugualmente $\quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\overline{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\beta\overline{u}) = u_1$ per qualche $\beta \neq 0$ e quindi $\quad \alpha u + \beta\overline{u} \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$.
In particolare, da (!) e 1., segue che allora (+) vale per ogni $k < n$.

3. Una conseguenza di 2. é che

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$$

Intanto, $u \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}\,(\mathcal{A}u-\lambda u)=0$ cioé $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] \subset Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}$. Poi, usando 2.,

$$dim\,[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})]=1 \Rightarrow dim\left[(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left(Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right)\right]=$$

$$=dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right]-1=dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}\right]$$

Da 3. segue che esiste u_2 tale che $\mathcal{A}u_2-\lambda u_2=u_1$, e poi, iterando, per ogni $k<n$ esiste $u_{k+1} \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}$ tale che $\mathcal{A}u_{k+1}-\lambda u_{k+1}=u_k$.
Sia ora

$$\mathcal{P}=(u_1,\ldots,u_n)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore u_1 e gli **autovettori generalizzati** $u_k \quad k=2,\ldots,n$. Siccome

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_1=\mathcal{P}^{-1}\lambda u_1=\lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_k=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_k=\mathcal{P}^{-1}(\lambda u_k+u_{k-1})=\lambda e_k+e_{k-1}, \qquad k=2,\ldots,n$$

concludiamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}=(\lambda e_1,\lambda e_2+e_1,\ldots,\lambda e_n+e_{n-1})$$

ove $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é descritta come riga di vettori colonna. É questa la **forma canonica** per $\mathcal{A}$.

Ora, il sistema differenziale associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{y}_1=\lambda y_1+y_2, \quad \dot{y}_2=\lambda y_2+y_3, \quad \ldots \quad ,\dot{y}_{n-1}=\lambda y_{n-1}+y_n, \qquad \dot{y}_n=\lambda y_n$$

Iterando il calcolo effettuato nel caso $n=2$ troviamo per tale sistema le n soluzioni

$$(e^{\lambda t}\ ,\ 0\,,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 0)$$

$$(te^{\lambda t}\ ,\ e^{\lambda t},0,\ldots\ldots\ldots,\ 0)$$

$$(t^2e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ e^{\lambda t},\ 0,\ldots\ ,\ 0)$$

....

$$(t^{n-1}e^{\lambda t},t^{n-2}e^{\lambda t},\ldots\ldots,e^{\lambda t})$$

Tali n soluzioni hanno Wronskiano evidentemente diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale da cui, applicando $\mathcal{P}$, si ottiene un sistema fondamentale per $\dot{x}=\mathcal{A}x$.

Equazioni differenziali di ordine superiore

Consideriamo il problema di Cauchy: data $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}), t_0 \in \mathbf{R}$, trovare $\delta > 0$ e $y \in C^n((t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), t), \qquad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

$$y(t_0) = c_0, \qquad y'(t_0) = c_1, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad y^{(n-1)}(t_0) = c_n$$

Se y é una soluzione, allora $x_1 := y, x_2 := y', \ldots, x_{n-1} := y^{(n-2)}, x_n := y^{(n-1)}$ risolve il sistema differenziale del primo ordine associato

$$\dot{x}_1 = x_2, \ldots\ldots \dot{x}_{n-1} = x_n, \qquad \dot{x}_n = f(x_1, \ldots, x_n, t)$$

insieme alla condizione iniziale $x_1(t_0) = c_0, \ldots, x_n(t_0) = c_n$. In particolare il problema di Cauchy dato ha al piú una soluzion, ed ha in effetti esattamente una soluzione ottenuta a partire dalla soluzione del problema di Cauchy per il sistema del primo ordine associato. Si estendono poi in modo ovvio i teoremi di esistenza globale validi per i sistemi del primo ordine. In particolare, se $a_j, j = 1, \ldots n$ sono funzioni continue in I, l'equazione lineare di ordine n

$$(EDL) \qquad y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots, a_n(t)y(t) = 0$$

ha soluzioni definite in I e tali soluzioni formano un sottospazio lineare di dimensione n di $C^n(I)$. Una base di tale spazio, diciamo $y_1, \ldots, y_n$, si chiama Sistema Fondamentale. Un sistema di n soluzione é un sistema fondamentale se e solo se il Wronskiano

$$W(t) := \det\left(y_j^{(i-1)}(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

é diverso da zero per ogni t (equivalentemente: per qualche t). Se $y_j, j = 1, \ldots, n$ é sistema fondamentale, allora le soluzioni di (EDL) sono tutte e sole le funzioni

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n, \qquad c_j \in \mathbf{R} \qquad \textbf{Integrale Generale}$$

Se a_j sono costanti, e se λ é uno zero reale di molteplicitá q di

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \qquad \textbf{polinomio caratteristico}$$

allora (EDL) ha le q soluzioni

$$y_1 = e^{\lambda t}, \qquad y_2 = te^{\lambda t}, \quad \ldots \quad y_q = t^{q-1}e^{\lambda t}$$

Se invece $\lambda = \alpha + i\beta$ é uno zero complesso di molteplicitá p (e cosí pure $\overline{\lambda}$) (EDL) ha le $2p$ soluzioni

$$y_1 = e^{\alpha t}\sin\beta t, \qquad y_2 = te^{\alpha t}\sin\beta t, \quad \ldots \quad y_p = t^{p-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\hat{y}_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad \hat{y}_2 = e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad \ldots \quad \hat{y}_p = t^{p-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$

Si ottiene in questo modo un sistema fondamentale.