AM2 2007-2008: II ESONERO

TEMA 1 (Formula di Taylor) . Sia $f \in C^2(D_r(u))$, $u \in \mathbf{R}^n$. Provare che

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;<\nabla f(u)\,,\, h>\; + \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h> \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

TEMA 2 (Principio dei moltiplicatori di Lagrange). Siano $f, g \in C^1(\mathbf{R}^n)$.

Sia $\Sigma := \{x \in \mathbf{R}^n : \quad g(x) = 0\}$ non vuoto. Sia $\underline{x} \in \Sigma$ tale che

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \Sigma \cap B_\delta(\underline{x}) \;\text{ per qualche } \quad \delta > 0$$

Provare che, se $\nabla g(\underline{x}) \neq 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbf{R}$, tale che

$$\nabla f(\underline{x}) = \lambda \nabla g(\underline{x})$$

TEMA 3 (Regolarizzazione per convoluzione). Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tale che

$\varphi \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \;=\; 1$. Sia $\quad \varphi_\epsilon(x) \;:=\; \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Provare che se $f \in C(\mathbf{R})$, allora

$$f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon \to 0} f \quad \text{uniformemente sui limitati}$$

TEMA 4 (Teorema delle contrazioni) . Sia (X, d) spazio metrico completo.

Sia $C \subset X$ chiuso e $T : C \to C$ tale che

$$\exists k \in (0,1): \quad d(Tx, Ty) \leq kd(x,y) \quad \forall\, x, y \in C$$

Provare che esiste un unico $x \in C$ tale che $\quad T(x) = x$.

Applicare tale Teorema per provare che se $\quad f \in C^1(\mathbf{R}^m_t \times \mathbf{R}^n_x, \mathbf{R}^n)$, $\quad f(0,0) = 0$ e $\mathcal{A} := \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ é invertibile, allora esistono $\delta, \sigma > 0$ tali che se $\|t\| \leq \delta$ allora esiste un unico $x = x(t)$, $\|x\| \leq \sigma$ tale che $f(t,x) = 0$.

TEMA 5 (Esistenza globale) . Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Provare che se

$$\exists B, C > 0: \qquad \|f(x)\| \leq B + C\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora le soluzioni del sistema differenziale $\quad \dot{x} = f(x) \quad$ sono definite globalmente.

ESERCIZIO 1

Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Determinare

$$\max_D\, xyz, \qquad \min_D\, xyz$$

ESERCIZIO 2

Provare che tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra loro equivalenti

ESERCIZIO 3 Sia

$$f(x) = x(x-1)\log(\log x^2)^2,\ x \neq 0, \pm 1, \quad f(0) = f(1) = 0$$

Dato $x_0 \geq 0$, sia $x(t; x_0)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Determinare le posizioni di equilibrio. Stabilire, in dipendenza da x_0, se
(i) il problema di Cauchy ha una sola soluzione locale/ globale
(ii) in caso di unicitá, l'intervallo massimale di esistenza

ESERCIZIO 4

Trovare tutte le soluzioni $y = y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - y^{(2)} + 2y' - y = t^2 e^t$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Diciamo $f(x,y,z) := xyz, \quad g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2.$

Ricerca di **massimi/ minimi di** f **interni** a D: $\quad 0 = \nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ in tutti (e soli) i punti degli assi coordinati $(x,0,0), (0,y,0), (0,0,z)$.
In tali punti f si annulla. In particolare, $(0,0,0)$ non puó essere né di massimo né di minimo (locale) perché f cambia segno attorno a $(0,0,0)$. Poi $f(x, \epsilon x, \pm\epsilon) = \pm\epsilon^2 x^2 =$ e quindi f cambia segno anche attorno a $(x,0,0)$ che non sono quindi né di massimo né di minimo (locale). Analogamente per gli altri punti stazionari.

Dunque **il massimo ed il minimo di** f su D (che esistono per Weierstrass e sono, rispettivamente, positivo/negativo) sono raggiunti **sul bordo di** D, in punti che debbono soddisfare il sistema lagrangiano

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g = 1$$

ovvero

$$yz = 2\lambda x, \quad xz = 2\lambda y, \quad xy = 2\lambda z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Intanto, deve essere $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ perché $xyz \neq 0$ e quindi $\lambda \neq 0$. Ma allora, dovendo essere $xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$ deve essere $x^2 = y^2 = z^2$ e quindi $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$. Quindi i punti di max/min sono i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ e

$$\max_D \, xyz = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad \min_D \, xyz = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

ESERCIZIO 3 La funzione

$$f(x) = x\,(x-1)\,\log(\log x^2)^2 \quad \text{se} \quad x \neq 0, x \neq \pm 1 \quad \text{ed} \quad f(0) = f(1) = 0$$

é continua in $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, é C^1 in $\mathbf{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ e ha derivata infinita in $x = 0$ e $x = 1$.

Equilibri. f si annulla in

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \pm\sqrt{e}, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Questi sono i punti di equilibrio per l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

cioé le costanti $x(t) \equiv 0, x(t) \equiv 1, x(t) \equiv \pm\sqrt{e}, x(t) \equiv \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ sono soluzioni (banali) dell'equazione. Per trovare le altre soluzioni, studiamo i Problemi di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \neq -1$$

Siccome $f \in C^1(\mathbf{R} \setminus \{0, \pm 1\})$, tali problemi hanno, almeno localmente, esattamente una soluzione $x = x(t; x_0)$, se $x_0 \neq 0, 1$. Inoltre, posto

$$I_1 = (-\infty, -\sqrt{e}), \quad I_2 = (-\sqrt{e}, -1), \quad I_3 = (-1, -\frac{1}{\sqrt{e}}), \quad I_4 = (\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$$

$$I_5 = (0, \frac{1}{\sqrt{e}}), \quad I_6 = (\frac{1}{\sqrt{e}}, 1), \quad I_7 = (1, \sqrt{e}), \quad I_8 = (\sqrt{e}, +\infty)$$

$f > 0$ in I_1, I_4, I_6, I_8 mentre $f < 0$ in I_2, I_3, I_5, I_7. Quindi, se $x_0 \in I_i$,, $x(t)$ é crescente in I_i se $i = 1, 4, 6, 8$ mentre é decrescente in I_i se $i = 2, 3, 5, 7$. Inoltre, se $x_0 \in I_i$,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{f(s)} = \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} \equiv 1$$

e quindi integrando tra zero e t:

$$t = \Phi_i(x(t)), \qquad \Phi_i(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)} ds \qquad x \in I_i$$

ovvero, essendo $x \to \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)} ds$ strettamente monotona in I_i,

$$x(t) = \Phi_i^{-1}(t), \qquad t \in \Phi_i(I_i)$$

ove

$$\Phi_1(I_1) = (\int_{x_0}^{-\infty} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}, \int_{x_0}^{-\sqrt{e}} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2})$$

Notiamo che $\int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2} < +\infty$ perché $f(s) = s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2$ ha una crescita piú che quadratica, mentre $\int_{x_0}^{-\sqrt{e}} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2} = +\infty$ perché $s = -\sqrt{e}$ é uno zero del primo ordine per $f(s) = s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2$. Quindi l'intervallo di esistenza di $x(t; x_0)$, $x_0 \in I_1$ é

$$\Phi_1(I_1) = (-\int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}, +\infty)$$

Analogamente

$$\Phi_8(I_8) = (-\infty, \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}) \qquad \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2} < +\infty$$

Sia poi $x_0 \in I_i, i = 2, 3$. Siccome $f(s)$ é limitata attorno a -1, $\int_{x_0}^{-1} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}$ é finito e

$$\Phi_2(I_2) = (\int_{x_0}^{-1} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}, +\infty), \quad \Phi_3(I_3) = (-\infty, \int_{x_0}^{-1} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2})$$

Se $x_0 \in I_4$, é

$$\Phi_4(I_4) = (\int_{x_0}^{-\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}, \int_{x_0}^{0} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2}) = (-\infty, +\infty)$$

perché, di nuovo, $s = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ é uno zero del primo ordine per $f(s) = s(s-1)\log(\log s^2)^2$, e $\int_{x_0}^{0} \frac{ds}{s\,(s-1)\,\log(\log s^2)^2} = \frac{1}{4} \int_{-\log x_0^2}^{+\infty} \frac{d\sigma}{(e^{-\frac{\sigma}{2}}+1)\,\log\sigma} = +\infty$.

Ugualmente, $\Phi_5(I_5) = \Phi_6(I_6) = \Phi_7(I_7) = (-\infty, +\infty)$.