ESERCITAZIONE 3: I TEOREMI DI ROLLE, LAGRANGE E CAUCHY

Tiziana Raparelli

13/03/2008

1 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEI TEOREMI DI ROLLE E DI LAGRANGE

Proposizione 1.1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, allora $\exists$ un punto $c \in (a, b)$ t.c. la retta tangente è parallela all'asse delle x.*

Proposizione 1.2. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, allora $\exists$ un punto $c \in (a, b)$ t.c. la retta tangente è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a)), (b, f(b))$.*

Proposizione 1.3. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, allora:*
i) Se $f'(x) = 0$ allora $f(x) = cost$ in $[a, b]$.
ii) Se $f'(x) > 0$ allora $f(x)$ è strettamente crescente in $[a, b]$.
iii) Se $f'(x) < 0$ allora $f(x)$ è strettamente decrescente in $[a, b]$.

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Date le seguenti funzioni, dire se si possono applicare o meno i teoremi di Rolle o di Lagrange negli intervalli indicati:
(1) $f(x) = |x|$ in $[-1, 1]$
(2) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ in $[-2, 2]$
(3)

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2:
Dimostrare la seguente identità:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3:
Dimostrare che la seguente disequazione è soddisfatta nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$:

$$e^x > \sin x + \cos x.$$

ESERCIZIO 4:
Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$e^x - x = k.$$

ESERCIZIO 5:
Dimostrare che l'equazione

$$\sin x = x - 1$$

ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$.

SOLUZIONI:

ESERCIZIO 1:
(1) $|x|$non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle in $[-1, 1]$, in quanto non è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
(2) $\sqrt[3]{x^2}$ non soddisfa l'ipotesi di derivabilità nell'intervallo $[-2, 2]$ (in particolare nel punto 0).
(3)$h(x)$ non è continua nel punto $x_0 = 1$ e dunque non si può applicarle il teorema di Lagrange.

ESERCIZIO 2:
Sia $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, allora $f' = 0$ $\forall x \neq 0$, quindi per la proposizione 1.3 segue che $f = c_1$ in $(0, +\infty)$ ed $f = c_2$ in $(-\infty, 0)$ (in generale $c_1 \neq c_2$). Il valore di c_1 si determina dunque sostituendo ad x un qualsiasi punto dell'intervallo $(0, +\infty)$, o calcolando il limite per di f per $x \to 0^+$, o per $x \to +\infty$ (e analogamente per c_2.)

ESERCIZIO 3:
Sia $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, vogliamo dimostrare che $f(x) > 0$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x) = e^x - \cos x + \sin x$$

e

$$f''(x) = e^x + \sin x + \cos x.$$

Ora, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, risulta $f''(x) > 0$ e dunque per la proposizione 1.3 $f'(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo. Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$, perciò $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, e questo implica che f è strettamente crescente nell'intervallo. Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, segue la tesi.

ESERCIZIO 4:
Sia $f(x) = e^x - x$, allora $f'(x) = e^x - 1$ e $f' > 0$ $\forall x \in I_1 = (0, +\infty)$ e $f' < 0$ in $I_2 = (-\infty, 0)$. Dunqe f è strettamente crescente in I_1 e strettamente decrescente in I_2. Essendo inoltre $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ e $f(0) = 1$, segue (poiché f è continua in $I_1 \cup I_2$) che

$$f\big((-\infty, 0]\big) = f\big([0, +\infty)\big) = [1, +\infty).$$

Perciò l'equazione non ammetterà soluzioni se $k < 1$, ne avrà una se $k = 1$ ed avrà due soluzioni distinte per ogni valore di $k > 1$.

ESERCIZIO 5:
Sia $f(x) = \sin -x + 1$. Vogliamo dimostrare che f ha solo una radice reale. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, essendo f continua, esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 0$.
Per dimostrare che tale punto è unico, osserviamo innanzi tutto che per ogni $x < 0$ segue $f(x) > 0$ e per ogni $x > 2$, $f(x) < 0$. Quindi le radici di f sono da cercarsi nell'intervallo [0,2].
$f'(x) = \cos x - 1$ e $f' = 0$ (in $[0, 2]$) quando $x = 0$, mentre $f' < 0$ $\forall x \in (0, 2]$. Quindi f è strettamente decrescente nel'intervallo considerato, essendo $f(0) > 0$ e $f(2) < 0$, esiste un unico $x \in [1, 2]$ tale che $f(x) = 0$.