Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
12 SETTEMBRE 2008

Esercizio 1.
(a) Data la funzione

$$f(x) = \frac{3 - \log x}{1 + \log^2 x} - 1$$

determinare: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, derivata prima, eventuali massimi e minimi. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Verificare se f è uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
12 SETTEMBRE 2008

Esercizio 2.
Dimostrare che valgono le seguenti disuguaglianze

$$\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1.$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
12 SETTEMBRE 2008

Esercizio 3.

(a) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{\log(1+x^4)} \quad .$$

(b) Indicata con f la seguente funzione:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad ,$$

calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
12 SETTEMBRE 2008

Esercizio 4.
Discutere, al variare di α e $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha (x^4+1)^\beta} dx \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
12 SETTEMBRE 2008

Esercizio 5.
Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{\cos^2 x - 3\sin x - 3} dx \quad ,$$

$$\int \sin(\log x) dx$$

SOLUZIONI:
Esercizio 1:

$$\text{Dom} f = \{x > 0\}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \Rightarrow \text{ non ci sono asintoti verticali}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ è asintoto orizzontale.}$$
$$f'(x) = \frac{\log^2 x - 6\log x - 1}{x(1+\log^2 x)^2}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 3 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow x = e^{3\pm\sqrt{10}}$$

$e^{3-\sqrt{10}}$ é punto di massimo e $e^{3+\sqrt{10}}$ è punto di minimo per la funzione.

(b) f è uniformemente continua in $(0, +\infty)$ perché il limite per $x \to 0^+$ di f è finito (quindi esiste un prolungamento continuo di f in 0) e in un intorno di $+\infty$ vale il teorema dell'asintoto.

Esercizio 2:
Per la disuguaglianza di sinistra: sia $f(x) = \log x - \frac{x-1}{x}$.
Dimostriamo che $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.

$$\lim x \to 0^+ f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\Big(x\log x - x + 1\Big) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

dallo studio del segno di f' e dai precedenti risultati si evince che 1 è un punto di minimo assoluto e $f'(1) = 0$, da cui segue la tesi.

Per la seconda disuguaglianza si procede in modo analogo su $g(x) = x - 1 - \log x$, dimostrando che $g(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.
Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Punti stazionari:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$x = 1$ è punto di minimo assoluto per g e $g(1) = 0$.

Esercizio 3:
(a) Sviluppi di Taylor centrati in 0:

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5) \\ \sqrt{1 + 2x^2} &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ \log(1 + x^4) &= x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1 + 2x^2}}{\log(1 + x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{3/4x^4 + o(x^5)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{3}{4} \quad .$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt}{x - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applicando il teorema di De l'Hospital ed il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin(2x)}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$$

Sviluppando $\sin x$ in un intorno dello 0 fino al terz'ordine:

$$= \frac{2x - \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)}{x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)} = 6 \quad .$$

Esercizio 4:
Spezziamo l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha (x^4+1)^\beta} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha (x^4+1)^\beta} dx$$

Vicino lo 0:

$$\arctan x = o(x) \text{ e } x^4 + 1 = o(1) \quad ,$$

quindi:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha (x^4+1)^\beta} dx \sim \int_0^1 \frac{x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$$

che converge se e solo se $\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
In un intorno di $+\infty$:

$$\arctan x \sim \frac{\pi}{2} \quad , \quad x^4 + 1 \sim x^4$$

quindi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha (x^4+1)^\beta} dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+4\beta}} dx$$

che converge se e solo se $\alpha + 4\beta > 1$.
Dunque l'integrale dato converge se e e solo se $\alpha < 2$ e $\beta > \frac{1-\alpha}{4}$.

Esercizio 5:

Per il primo integrale effettuiamo il cambio variabile $t = \sin x$ e riscriviamo $\sin(2x)$ come $2 \sin x \cos x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{\cos^2 x - 3\sin x - 3} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2t dt}{-t^2 - 3t - 2}$$

che sappiamo integrare con il metodo dei razionali fratti: le radici del denominatore sono $t_{1,2} = -2, -1$, cerchiamo le costanti A e B tali che

$$\frac{-2t}{(t^2+3t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

che sono $A = 2$ e $B = -4$. Quindi calcoliamo gli integrali:

$$\begin{aligned} & 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t+1} - 4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t+2} = [2\log|t+1| - 4\log|t+2|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ = \ & 2\log(\frac{\sqrt{3}}{2}+1) - 4\log(\frac{\sqrt{3}}{2}+2) + 4\log 2 = \log\frac{16}{7+4\sqrt{3}} \quad . \end{aligned}$$

Per il secondo integrale sia $y = \log x$, dunque bisogna calcolare (per parti):

$$\begin{aligned} & \int \sin y e^y dy = e^y \sin y - \int e^y \cos y dy \\ = \ & e^y(\sin y - \cos y) - \int e^y \sin y dy \\ \Rightarrow \ & \int e^y \sin y dy = \frac{1}{2}e^y(\sin y - \cos y) + c \\ = \ & \frac{x}{2}(\sin(\log x) - \cos(\log x)) + c \quad . \end{aligned}$$