Am1c – Tutorato IX

Integrali IV

Martedì 6 Maggio 2008

Filippo Cavallari, Marianna Coletta

Esercizio 1 Calcolare i seguanti integrali utilizzando le sostituzioni suggerite:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ $\qquad x = a\sin t$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$ $\qquad x = a\sinh t$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$ $\qquad x = a\cosh t$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $\qquad x = a\sin t$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ $\qquad x = a\sinh t$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ $\qquad x = a\cosh t$

(Ricordiamo che $\sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ *e* $\cosh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$*)*

Nota Nell'esercizio che segue saranno utili le seguenti considerazioni: negli integrali contenenti $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ci si può sempre ricondurre a uno dei sei tipi dell'esercizio 1. Infatti distinguiamo due casi:

- Se $\boxed{b^2-4ac>0}$ è possibile trasformare ax^2+bx+c nella differenza di due quadrati. Infatti $ax^2+bx+c = \dfrac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-b^2\right) = \dfrac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-\left(b^2-4ac\right)\right]$
- Se $\boxed{b^2-4ac<0}$ è possibile trasformare ax^2+bx+c nella somma di due quadrati. Infatti $ax^2+bx+c = \dfrac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+\left(-b^2+4ac\right)\right]$

Esercizio 2 Calcolare i seguenti integrali irrazionali:

(1) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+13}\,dx$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2-x+1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,dx$