Am1c – Tutorato VII

Integrali II

Martedì 22 Aprile 2008

Filippo Cavallari, Marianna Coletta

Esercizio 1 Utilizzando la relazione goniometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otteniamo

$$\int \sin^{2007} x dx = \int \sin^{2006} x \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^{1003} \sin x dx$$

ora posto $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ avremo

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^{1003} \sin x dx = -\int \left(1-t^2\right)^{1003} dt = -\int \left[\sum_{k=0}^{1003} \binom{1003}{k} (-1)^k t^{2k} \right] dt = \sum_{k=0}^{1003} \left[\binom{1003}{k} (-1)^{k+1} \int t^{2k} dt \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{1003} \binom{1003}{k} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + k = \sum_{k=0}^{1003} \binom{1003}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos^{2k+1} x + k$$

Esercizio 2 Calcolare i seguenti integrali:

(1) Dato che $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ imponiamo che

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{x^2-5x+6}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$ da cui

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = -3\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{x-3} = -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + k$$

(2) Dato che $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ imponiamo che

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{x^2-3x+2}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$ da cui

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx = -2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x-2} = -2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + k$$

(3) Dato che $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$ imponiamo che

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(C-2A)x+A-B+C}{x^3-x^2-x+1}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=0 \\ A-B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \\ C=1 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+k$$

(4) Imponiamo che

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+A-2B+2C}{(x+2)(x-1)^2}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B+C=0 \\ A-2B+2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4/9 \\ B=5/9 \\ C=1/3 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx=\frac{4}{9}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{4}{9}\ln|x+2|+\frac{5}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+k$$

(5) Imponiamo che

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C}{(x-1)^3}$$

e quindi $\begin{cases} A=1 \\ -2A+B=0 \\ A-B+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+k$$

(6) Dato che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ imponiamo che

$$\frac{x^2+4x+4}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{x^3-1}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=4 \\ A-C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x^3-1}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=3\ln|x-1|-\ln\left(x^2+x+1\right)+k$$

(7) Dato che $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x-1)\left(x^2+1\right)^2$ imponiamo che

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^4+(-B+C)x^3+(2A+B-C+D)x^2+(-B+C-D+E)x+A-C-E}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ 2A+B-C+D=2 \\ -B+C-D+E=0 \\ A-C-E=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \\ E=0 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+k$$

(8) Imponiamo che

$$\frac{x^2-1}{(x-2)\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2-(2B-C)x+A-2C}{(x-2)\left(1+x^2\right)}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=1 \\ 2B-C=0 \\ A-2C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3/5 \\ B=2/5 \\ C=4/5 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{x^2-1}{(x-2)\left(1+x^2\right)}dx=\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{5}\int\frac{2x+4}{x^2+1}dx=\frac{3}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{3}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{4}{5}\arctan x+k$$

(9) Imponiamo che

$$\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}=\frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{(A+B)x^2+(5B+C)x+9A+5C}{(x+5)(x^2+9)}$$

e quindi $\begin{cases} A+B=5 \\ 5B+C=11 \\ 9A+5C=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-4 \end{cases}$ da cui

$$\int\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}dx=2\int\frac{dx}{x+5}+\int\frac{3x-4}{x^2+9}dx=2\ln|x+5|+\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}dx-4\int\frac{dx}{x^2+9}=$$

$$=2\ln|x+5|+\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3}+k$$

(10) $\int\frac{2x}{\sqrt{x^4+6x^2+9}}dx=\int\frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)^2}}dx=\int\frac{2x}{x^2+3}dx=\ln(x^2+3)+k$