

Am1c – Soluzioni Tutorato IV

Derivate e teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Martedì 18 Marzo 2008

Filippo Cavallari, Marianna Coletta

Esercizio 1 Notiamo innanzitutto che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono limitate in quanto $|\sin x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$ per qualsiasi valore di x . Inoltre la funzione x^c definita nell'intervallo $[-1,1]$ è limitata se e solo se $c \geq 0$.

(1) $f(x)$ è continua se $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} = 0$ per cui $\alpha > 0$.

(2) $f'(0)$ esiste se $\lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} \sin \frac{1}{h^\beta}$ esiste finito cioè se $\alpha > 1$ nel qual caso $\lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} \sin \frac{1}{h^\beta} = 0$.

(3) Nel caso in cui $\alpha > 1$, cioè quando la derivata prima esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \geq 1 + \beta$.

(4) $f'(x)$ è continua se e soltanto se $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = 0$ cioè se $\alpha > 1 + \beta$.

(5) $f''(0)$ esiste se $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha h^{\alpha-2} \sin \frac{1}{h^\beta} - \beta h^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{h^\beta}$ esiste finito cioè se $\alpha > \beta + 2$ nel qual caso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha h^{\alpha-2} \sin \frac{1}{h^\beta} - \beta h^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{h^\beta} = 0.$$

(6) Nel caso in cui $\alpha > \beta + 2$, cioè quando la derivata seconda esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f''(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x^\beta} - \alpha\beta x^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{x^\beta} - \beta(\alpha-\beta-1)x^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{x^\beta} - \beta^2 x^{\alpha-2\beta-2} \sin \frac{1}{x^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \geq 2 + 2\beta$.

(7) $f''(x)$ è continua se e soltanto se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x^\beta} - \alpha\beta x^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{x^\beta} - \beta(\alpha-\beta-1)x^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{x^\beta} - \beta^2 x^{\alpha-2\beta-2} \sin \frac{1}{x^\beta} = 0$$

cioè se $\alpha > 2 + 2\beta$.

Esercizio 2 Le funzioni elencate sono derivabili negli intervalli considerati in quanto sono somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre esse assumono lo stesso valore agli estremi dei rispettivi intervalli (verifica che viene omessa). Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Rolle. Troviamo esplicitamente i valori per i quali hanno derivata nulla negli intervalli indicati:

$$(1) f'(x) = 2x - 3 \text{ quindi } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$(2) f'(x) = 3x^2 + 10x - 6 \text{ quindi } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 + \sqrt{43}}{3}.$$

$$(3) f'(x) = 2 \sin x \cos x \text{ quindi } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

$$(4) f'(x) = -2 \sin x \cos x \text{ quindi } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Esercizio 3 È immediato verificare che $f(-1) = f(1) = 0$. Dal calcolo diretto segue inoltre che $f'(x) = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \quad \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ che non si annulla mai mentre nell'origine la funzione non è derivabile. Per questo il teorema di Rolle non si può applicare.

Esercizio 4 La funzione è derivabile in $[0, 1]$ in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Lagrange. Dato che $f'(x) = 2 - 2x$, segue

$$2 - 2c = f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 \text{ e quindi } c = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5 La funzione è derivabile in $[0, b]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Risulta quindi che $nc^{n-1} = f'(c) = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = b^{n-1}$ e quindi $c = \frac{b}{\sqrt[n]{n}}$.

Esercizio 6 Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (1, 2)$ tale che

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} = f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1$$

Dato che la funzione $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ è decrescente risulta che

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} = f'(2) < \sqrt[3]{2} - 1 < f'(1) = \frac{1}{3}$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 7 (1) Distinguiamo due casi: se $x \geq 0$ allora per il teorema di Lagrange risulta

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c \text{ con } c \in [0, +\infty) \text{ e nell'intervallo considerato } e^c \geq 1; \text{ il caso } x < 0 \text{ è analogo.}$$

(2) Considerata la funzione $f(x) = x^n$ per $x \in [a, b]$ dal teorema di Lagrange segue $\frac{b^n - a^n}{b - a} = nc^{n-1} < nb^{n-1}$ da cui la tesi.

Esercizio 8 Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $[1, 2]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy. Pertanto risulta

$$\frac{2c}{3c^2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{4 - 1}{8 - 1} = \frac{3}{7} \text{ con } c \in [1, 2]$$

da cui $c = \frac{14}{9}$.

Esercizio 9 (1) Posto $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto, poiché $f(0) = 0$, risulta $f(x) \equiv 0$ cioè la tesi.

(2) Posto $f(x) = \arccos x + \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x) = 0 \forall x \in (-1, 1)$. Pertanto, poiché $f(0) = 0$, risulta $f(x) \equiv 0$ cioè la tesi.