Am1c – Soluzioni Tutorato II

Continuità e uniforme continuità

Martedì 4 Marzo 2008

Filippo Cavallari, Marianna Coletta

Esercizio 1

(1) Uniformemente continua nell'intervallo $(-\infty;1)$ per il teorema dell'asintoto. Non è tuttavia uniformemente continua nell'intervallo $[1;+\infty)$: infatti se lo fosse, per il teorema della farfalla $\exists a,b\in\mathbb{R}:\left|e^x\right|\le a+bx$. Ne segue che per qualche $a,b\in\mathbb{R}$ risulta $\frac{e^x}{a+bx}\le 1$. Ma poiché $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{a+bx}=+\infty$ questo non è possibile.

(2) Uniformemente continua in $[1;2]$ per il teorema di Weierstrass in quanto l'intervallo è un chiuso e limitato e la funzione è continua su di esso; non lo è in $(0;2]$ perché $\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$.

(3) Uniformemente continua nell'intervallo $(-4;3)$ in quanto è possibile estenderla ad una funzione continua su $[-4;3]$. Non è tuttavia uniformemente continua in $[4;+\infty)$ poiché non soddisfa il teorema della farfalla.

(4) Nell'intervallo $(0;1)$ non è uniformemente continua in quanto non è estendibile per continuità nell'origine. Al contrario in $(1;+\infty)$ è uniformemente continua in quanto $\lim_{x\to 1^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin 1$ e $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (e quindi per il teorema dell'asintoto).

(5) Uniformemente continua in $(0;1)$ perché può essere estesa per continuità negli estremi dell'intervallo. Lo è anche nell'intervallo $(\pi;+\infty)$ per il teorema dell'asintoto.

(6) Uniformemente continua su tutto l'asse reale per il teorema dell'asintoto.

(7) Nell'intervallo $(0;1)$ la funzione è uniformemente continua in quando può essere estesa a una funzione continua in $[0;1]$. Per lo stesso motivo è uniformemente continua in $(-1;0)\cup(0;1)$, infatti si ha $\lim_{x\to 0^-}x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=0=\lim_{x\to 0^+}x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

(8) In $(0;1)$ è uniformemente continua in quanto estendibile ad una funzione continua su $[0;1]$. In $[1;2]$ è uniformemente continua in quanto è continua su tutto l'intervallo. Infine in $[1;+\infty)$ è uniformemente continua in quanto ha un asintoto orizzontale, infatti $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)=1$.

Esercizio 2

No, ad esempio la funzione $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ soddisfa la condizione richiesta ma non è continua nell'origine.

Esercizio 3

(1) Discontinua nell'origine in quanto $\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^{2n+1}}}=+\infty$.

(2) La funzione è continua $\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ in quanto composizione di funzioni continue. Inoltre è continua anche nell'origine in quanto $0=f(0)=\lim_{x\to 0} x^5 \sin^4\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to\infty}\frac{\sin^4(y)}{y^5}=0$.

(3) Discontinua nell'origine in quanto $2=f(0)\neq \lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x^2}5^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to-\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}x5^x=0$.

(4) Discontinua in -5 in quanto $4=f(-5)\neq \lim_{x\to -5}\frac{x^2+7x+10}{x+5}=\lim_{x\to -5}\frac{(x+2)(x+5)}{x+5}=\lim_{x\to -5} x+2=-3$.

Esercizio 4

(1) Poiché risulta $f(1)=a+b$ $\lim_{x\to 1^+} ax+b=a+b$ $\lim_{x\to 1^-} cx^2+dx+2=c+d+2$ la funzione è continua in $1\Leftrightarrow a+b=c+d+2$.

(2) Poiché risulta $f(0)=7$ $\lim_{x\to 0^+} ax^8+7=7$ $\lim_{x\to 0^-} e^{bx}-c=1-c$ la funzione è continua in $0\Leftrightarrow c=-6$.

(3) Si ottiene che $\lim_{x\to 0^+} x^a\sin^4 x=0\Leftrightarrow a>-4$ $\lim_{x\to 0^-}|x|^b\cos^3\left(\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow b>0$.