ESERCITAZIONE 2: LE DERIVATE

Tiziana Raparelli

12/03/2008

1 TEOREMI

Teorema 1.1 (Sulle regole di derivazione)**.** *:*

Siano $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in A; allora valgono le seguenti regole di derivazione:
1) la funzione $f + g$ è derivabile in A e si ha

$$(f+g)' = f' + g';$$

2) la funzione $(f \cdot g)$ è derivabile in A e si ha

$$(f \cdot g)' = f'g + fg';$$

3) $\forall x \in A | g(x) \neq 0$, la funzione $\frac{f}{g}$ è derivabile e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Inoltre, se $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subset g(A) \to \mathbb{R}$, sono entrambe derivabili nei loro domini di definizione, allora la funzione composta $(f \circ g)$ è derivabile in A e risulta

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'.$$

Teorema 1.2 (Derivata della funzione inversa)**.** *:*
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile e strettamente monotona in (a, b) t.c. $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile e si ha:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Dimostare, applicando la definizione di derivata, e le regole viste nei teoremi 1.1 e 1.2, le seguenti uguaglianze:
1)$(\sin x)' = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$
2)$(\cos x)' = -\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
3)$(x^m)' = mx^{m-1} \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$
4)$(e^x)' = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$
5)$(\log x)' = \frac{1}{x} \ \forall x \in \mathbb{R}_+$
6)$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
7)$(|x|)' = \frac{x}{|x|}$
8)$(\sinh x)' = \cosh x \ \forall x \in \mathbb{R}$
9)$(\cosh x)' = \sinh x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2:
Dire dove le seguenti funzioni sono definite e calcolarne le derivate (discutendone l'insieme di derivabilità) :
1)$f(x) = (x^2+2)e^{\sin x}$
2)$f(x) = \tan x + \log(x^2+1)$
3)$f(x) = \sqrt{x^2+x-1}$
4)$f(x) = \log(\arctan(x^3))$
5)$f(x) = \frac{x^5+3x^2+2}{\sqrt{\sin x}}$
6)$f(x) = \frac{\log(\cos^2 x}{)}e^{\sqrt{x}}$
7)$f(x) = (\arcsin x)^{x^3}$.

ESERCIZIO 3:
Discutere al variare di a e b in $\mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2+3} & \text{se } x \leq 1 \\ b\log x + (2a+1)x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 4:
Discutere al variare di a e b in $\mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-a} & \text{se } x \leq 2 \\ -\frac{b}{x-4} - 3 & \text{se } 2 < x < 4. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5: Sia f definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è derivabile in 0 e f' non è continua in 0, ($\Leftrightarrow f$ è derivabile in 0, ma non è $\mathcal{C}^1(\{0\})$).

SOLUZIONI:

ESERCIZIO 1:
1)Attraverso la definizione di derivata:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

ricordando la formula trigonometrica:

$$\sin a - \sin b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$$

ponendo $a = x + h$, $b = h$, segue:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{2x+h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

2)Analogamente a quanto visto in 1), segue dalla definizione ricordando la seguente:

$$\cos a - \cos b = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2}).$$

3) Per $n = 0$ e $n = 1$, il risultato segue banalmente. Per $n = 2$ segue applicando la regola di derivazione del prodotto. Usiamo il principio di induzione su n: Se $(x^n)' = nx^{n-1}$, allora

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1)x^n.$$

4)

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^x.$$

5)Si consideri $f(x) = e^x$, dunque $\log x = f^{-1}(x))$. Per il teorema della derivata della funzione inversa: sia $x = e^y$, allora $\forall x \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$(\log(x))' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

6)Grazie al teorema della derivata della funzione inversa, sfruttando il fatto che:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

8) e 9) seguono dalla definizione di $\sinh x$ e $\cosh x$.

ESERCIZIO 2:
Siano $I = \mathrm{dom}(f)$, $J = \mathrm{dom}(f')$. Allora:

1)
$$I = \mathbb{R},$$
$$f'(x) = e^{\sin x}\big((x^2+2)\cos x + 2x\big),$$
$$J = \mathbb{R}.$$

2)
$$I = \mathbb{R} - \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x}{x^2+1},$$
$$J = I.$$

3)
$$I = \{x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\},$$
$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}},$$
$$J = \{x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}.$$

4)
$$I = (0, +\infty),$$
$$f'(x) = \frac{1}{\arctan(x^3)} \frac{3x^2}{1+x^6},$$
$$J = I.$$

5)
$$I = \{2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$f'(x) = \frac{5x^4+6x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{(x^5+3x^2+2)\cos x}{2(\sin x)^{3/2}},$$
$$J = I.$$

6)
$$I = \{x \geq 0 | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\},$$

$$f'(x) = \big(-2\tan x + \frac{\log(\cos^2 x)}{2\sqrt{x}}\big)e^{\sqrt{x}},$$

$$J = \{x > 0 | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\}.$$

7)

$$I = [0, 1],$$

$$f'(x) = (\arcsin x)^{x^3} x^2 \big(3\log(\arcsin x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\arcsin x}\big),$$

$$J = [0, 1).$$

ESERCIZIO 3:
Per la continuità in $x_0 = 1$ deve essere $a + 2 = 2a + 1$, ossia $a = 1$.
Per la derivablità in 1 deve essere $f'_-(1) = f'_+(1)$, cioè

$$\frac{1}{2} = b + 2a + 1$$

da cui $b = -\frac{5}{2}$.

ESERCIZIO 4:
Per la continuità in 2 deve essere $e^{4-a} = \frac{b}{2} - 3$.
Per la derivabilità in 2 deve essere $2e^{4-a} = \frac{b}{4}$, da cui troviamo i valori $a = 4$, $b = 8$.

ESERCIZIO 5:
$f(x)$ è continua in) per $\alpha = 0$ e calcolando il limite del rapporto incrementale di f in 0, troviamo che $\exists f'(0)$ e $f'(0) = 0$, cioè

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che in 0 presenta una discontinuità di II specie.