Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
GE4 - Geometria Differenziale 1
TUTORATO VIII - LIVIA CORSI E GABRIELE NOCCO (27-11-06)

ESERCIZIO 1. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, dove $e_1,\ e_2 \in T_p\Sigma$ sono le direzioni principali nel punto p. Calcolare gli zeri della seconda forma quadratica:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi) & \longrightarrow & [-k_2,-k_1] \\ & \theta & \longmapsto & -k_1\cos^2\theta - k_2\sin^2\theta \end{array}$$

che da la curvatura normale per ogni vettore $v \in T_p\Sigma$. Gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche*. Dimostrare inoltre che si hanno:

1. Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
2. Una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
3. Due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
4. Infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

ESERCIZIO 2. Per ognuna delle seguenti superfici regolari calcolare la curvatura di Gauss nell'origine, $\mathrm{K}(\underline{0}) = det(\mathrm{d}N_{\underline{0}})$, stabilendo se si tratta di un punto ellittico, iperbolico, parabolico o planare:

1. Il cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$
2. La "Sella di scimmia" data dalla carta locale

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,u^3-3v^2u) \end{array}$$

3. La superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z = x^4\}$.

Analizzare in ciascun caso la posizione della superficie, intorno all'origine, rispetto al piano ivi tangente. Cosa si può concludere in generale, riguardo a questa questione, nell'intorno di un punto in cui $det(\mathrm{d}N) = 0$?

ESERCIZIO 3. Sia $\gamma(v) = (\varphi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1-e^{-2t}}\mathrm{d}t), v \geq 0$ la curva cosiddetta "*trattrice*". La superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice, posta nel piano xz, attorno all'asse z è detta "*pseudosfera*". Utilizzando la formula che da la curvatura di Gauss per superfici di rotazione (Do Carmo p. 162), verificare che la pseudosfera ha curvatura di Gauss costante K$= -1$.