Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO IV - LIVIA CORSI E GABRIELE NOCCO (18-10-06)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Considerare la seguente funzione di tre variabili

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 \end{array}$$

1. Trovare l'aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^3$ in cui F è liscia, cioè di classe C^∞.
   Descrivere geometricamente il suo complementare: $\mathbb{R}^3 \setminus U$.
2. Scrivere il campo gradiente ∇F e trovare i punti critici di F.
3. Sia Σ il sottoinsieme dello spazio Euclideo

   $$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 = 1\}$$

   Dimostrare che Σ è una superficie liscia.
4. Dimostrare che Σ è compatta, cioè un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$.
5. Dimostrare che l'applicazione

   $$\begin{array}{cccc} \mathbf{x}: & (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & ((\cos v+3)\cos u, (\cos v+3)\sin u, \sin v) \end{array}$$

   è una carta locale su Σ. Descrivere $Im\mathbf{x} \subset \Sigma$.

<u>ESERCIZIO 2.</u> La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right), \ (x,y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Mostrare che S non può essere scritta come immagine inversa di un valore regolare.