Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

GE4 - GEometria Differenziale 1

Tutorato I - Livia Corsi e Gabriele Nocco (27-09-06)

<u>Esercizio 1.</u> Siano

$$\begin{aligned} u(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ v(t) &= (a(t), b(t), c(t)) \end{aligned}$$

due vettori in $\mathbb{R}^3$ che variano al variare del tempo $t \in I$ in maniera liscia (ad esempio vettori tangenti a due curve liscie). Dimostrare che il loro prodotto scalare

$$u(t) \cdot v(t) : I \to \mathbb{R}$$

è una funzione liscia. Dimostrare inoltre che per la derivata del prodotto scalare vale la seguente regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = \dot{u}(t)v(t) + u(t)\dot{v}(t) : I \to \mathbb{R}$$

<u>Esercizio 2.</u> Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, con $\dot{\alpha} \neq 0 \; \forall t \in I$. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla (i.e. α giace su una sfera) se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale ad $\dot{\alpha}(t) \; \forall t \in I$.

<u>Esercizio 3.</u> Sia $v = (a, b, c)$ un vettore fissato e sia $I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove $I = [0, 1]$. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che

$$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}(t)dt = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0))$$

<u>Esercizio 4.</u> Mostrare che l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = |x|\}$
(4.1) è la traccia di una curva regolare a tratti non liscia.
(4.2) è la traccia di una curva liscia.
(4.3) non può essere la traccia di una curva regolare.