# GE2 - Tutorato IV

Chiara Del Vescovo

13 dicembre 2006

**Definizione 0.1.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine definito sullo spazio vettoriale $V$. Una AFFINITA' su $\mathbb{A}$ è una coppia $f = (f, \psi)$ data da un'applicazione biunivoca $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ e da un automorfismo $\psi : V \longrightarrow V$, in modo tale che $\forall P, Q \in \mathbb{A}$ risulti $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \psi(\overrightarrow{PQ})$.

**Definizione 0.2.** In $\mathbb{A}^n$ si scelgano $n+1$ punti $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Tali punti sono detti INDIPENDENTI se gli $n$ vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ sono linearmente indipendenti, e dunque formano una base di $V^n_{\mathbb{R}}$.

**Lemma 0.3.** *Fissato un punto $O \in \mathbb{A}$, $\forall\ O' \in \mathbb{A}'$ e $\forall \psi \in GL(V)$, esiste un'unica affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ t.c. $f(O) = O'$ e t.c. l'automorfismo associato ad $f$ sia $\psi$.*
*In particolare, un'affinità è univocamente determinata dall'automorfismo di $V$ ad essa associato e dall'immagine $f(O)$ di un qualsiasi punto $O \in \mathbb{A}$.*

**Teorema 0.4** (Teorema fondamentale delle affinità)**.** *Consideriamo in $\mathbb{A}^n$ i due insiemi $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ formati da $n+1$ punti linearmente indipendenti; allora, esiste un'unica affinità $f = (f, \psi)$ tale che $f(P_i) = Q_i \qquad \forall i = 0, \ldots, n$.*

ESEMPI:

1. L'identità $\mathbb{1}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è una affinità, con automorfismo associato l'identità $\mathbb{1}_V \in GL(V)$.

2. Un'importante classe di trasformazioni afini di uno spazio affine $\mathbb{A}$ su $V$ è quella costituita dalle traslazioni:
sia $v \in V$; definiamo la TRASLAZIONE DEFINITA DA v come l'affinità che associa ad ogni $P \in \mathbb{A}$ il punto $t_v(P)$ t.c. $\overrightarrow{Pt_v(P)} = v$. Si vede facilmente che l'automorfismo associato ad una qualsiasi traslazione è ancora l'identità $\mathbb{1}_V : V \to V$.

3. Dato $O \in \mathbb{A}$, consideriamo il gruppo di trasformazioni affini formato da tutte le affinità che lasciano fisso il punto $O$; per il lemma precedente, ognuna di esse sarà individuata dalla matrice dell'automorfismo associato $\psi \in GL(V)$.

4. Dato $c \in \mathbb{K}$, una OMOTETIA di centro $O$ e fattore $c$ è $f \in \mathbf{Aff}(\mathbb{A})_O$ dove l'automorfismo associato è la matrice $c\mathbb{1}_V$.

1. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ uno spazio affine con riferimento affine $(O, \mathbb{E})$.

   (a) Determinare l'equazione di ogni affinità $f$ che fissa i punti della retta $r$ di equazione $x + y = 1$;

   (b) Considerati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, 1) \in \mathbb{A}$, tra le affinità considerate in (a) determinare quelle (eventuali) che trasformano $P$ in $Q$;

   (c) Tra le affinità considerate in (a) determinare eventuali traslazioni.

2. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ uno spazio affine con riferimento affine $(O, \mathbb{E})$. Consideriamo i punti:
   $P_0 = (1, 0, 0),\ P_1 = (1, 0, 1),\ P_2 = (0, 0, -1),\ P_3 = (0, 1, 0)$ e
   $Q_0 = (1, 0, 0),\ Q_1 = (0, 0, -1),\ Q_2 = (1, 0, 1),\ Q_3 = (1, 2, 1)$.

   (a) Verificare che le due quaterne sono quaterne di punti indipendenti;

   (b) Scrivere le equazioni dell'unica affinità $(f, \psi)$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$;

   (c) Determinare i punti fissi di $f$.

3. Classificare le seguenti coniche definite su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, determinarne la forma canonica e, se esiste, il centro:

   (a) $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y + 6 = 0$;

   (b) $x^2 - 2y + 3 = 0$;

   (c) $2xy - 2x + 1 = 0$;

   (d) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0$;

   (e) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12y + 9 = 0$;

   (f) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + 2y + \frac{5}{4} = 0$;

   (g) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$.

4. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dotato di riferimento proiettivo standard $RP(\mathbb{E})$ sono assegnati i punti: $P_0 = [1, 0, 0],\ P_1 = [-1, 1, 0],\ P_2 = [2, -1, 1],\ P_3 = [0, 0, 1]$.

   (a) Verificare che tali punti sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$;

   (b) Determinare l'unica proiettività che trasforma ordinatamente $P_0, P_1, P_2, P_3$ nei punti $[1, 0, 0],\ [0, 1, 0],\ [0, 0, 1]$ e $[1, 1, 1]$;

   (c) Calcolare i punti fissi di $f$.