AM3 - Soluzioni Esercitazione 3
26 marzo 2007

1) Notiamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Abbiamo che per $(x,y) \neq (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y \right) \neq (0,0).$$

Studiamo i punti critici vincolati di f sul bordo $\{x^2+y^2=9\}$:

$$\nabla f(x,y) = \lambda(x,y),\ \ x^2+y^2=9.$$

Equivalentemente, $x=0$, $y=\pm 3$ oppure $x \neq 0$,

$$\frac{y}{3} + 2y = \frac{y}{3}\ ,\ \ \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 0.$$

Nei punti critici vincolati $P_\pm = (0,\pm 3)$, $Q_\pm = (\pm 3, 0)$ abbiamo che: $f(Q_\pm) = 2 < f(P_\pm) = 11$. Notando che nel punto di non differenziabilitá vale $f(0,0) = -1$, abbiamo che

$$\min_D f = f(0,0) = -1, \quad \max_D f = f(P_\pm) = 11.$$

2) Osservando che $f(n,0) = n^2 \to +\infty$ e $f(n,n) = n^2 - n^3 \to -\infty$ per $n \to +\infty$, otteniamo che

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty\ , \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty.$$

L'unico punto critico di f è l'origine:

$$\nabla f(x,y) = (2x - y^2, -2xy) = (0,0)\ \Rightarrow\ x = y = 0,$$

ove l'Hessiano

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha un autovalore nullo ed uno positivo. Poiché $f(t,0) = t^2 > 0$ e $f(t^3,t) = -t^5(1-t) < 0$ per $0 < t < 1$, otteniamo che vicino all'origine f assume sia valori positivi che negativi. Essendo $f(0,0) = 0$, l'origine è un "punto di sella".

L'insieme D puó essere scritto analiticamente come

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ |x| \leq \frac{1}{2}\}$$

ed ha come bordo

$$\partial D = \{(\pm\frac{1}{2}, y) : |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2 = 1,\ |x| \leq \frac{1}{2}\}.$$

I punti critici vincolati di f sulla retta $(\pm\frac{1}{2}, y)$, $y \in \mathbb{R}$, devono soddisfare $y^2 = \pm 1$, $\mp y = \lambda$. I punti $P_\pm = (\frac{1}{2}, \pm 1)$ non sono accettabili perché $P_\pm$ non appartiene al segmento $\{(\frac{1}{2}, y) : |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.
I punti critici vincolati di f su $\{x^2 + y^2 = 1\}$:

$$(2x - y^2, -2xy) = \lambda(x, y),\ x^2 + y^2 = 1$$

devono soddisfare $x = \pm 1$, $y = 0$ oppure $y \neq 0$, $2x^2 + 2x - y^2 = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. I punti $Q_\pm = (\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{8}}{3})$ sono accettabili perché $Q_\pm$ è interno all'arco di circonferenza $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ |x| \leq \frac{1}{2}, \pm y > 0\}$ mentre $M_\pm = (\pm 1, 0)$ non sono accettabili. Abbiamo che $f(Q_\pm) = -\frac{5}{27}$.
Gli altri possibili candidati sono punti di bordo di $\{(\pm\frac{1}{2}, y) : |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ e di $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ |x| \leq \frac{1}{2}\}$, ossia $W_\pm = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $J_\pm = (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Abbiamo che

$$f(Q_\pm) = -\frac{5}{27} < f(J_\pm) = -\frac{1}{8} < f(W_\pm) = \frac{5}{8},$$

e quindi

$$\min_D f = f(Q_\pm) = -\frac{5}{27}\,, \quad \max_D f = f(W_\pm) = \frac{5}{8}.$$

3) Dato $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1$, l'insieme D rappresenta la porzione del paraboloide $\{\phi = 0\}$ nel semispazio superiore $\{z \geq 0\}$. I punti di massimo/minimo assoluto di f su D possono trovarsi in $D_0 = D \cap \{z > 0\}$ oppure in $D_1 = D \cap \{z = 0\}$.
Per trovare gli eventuali candidati in D_0, studiamo i punti critici vincolati di $f(x, y, z)$ su tutto il paraboloide $\{\phi = 0\}$. Dal Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo risolvere il sistema

$$2x(1 - \lambda) = 0\,,\ 2y(2 - \lambda) = 0\,,\ 6z - \lambda = 0 \quad x^2 + y^2 + z - 1 = 0.$$

Se $\lambda \neq 1, 2$, abbiamo che $x = y = 0$ e quindi $z = 1$. Se $\lambda = 1$, abbiamo che $y = 0$, $z = \frac{1}{6}$ e quindi $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$. Se $\lambda = 2$, abbiamo che $x = 0$, $z = \frac{1}{3}$ e quindi $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Otteniamo quindi i punti $M = (0, 0, 1)$, $P_\pm = (\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})$ e $Q_\pm = (0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})$, tutti accettabili poiché si trovano in D_0.
Consideriamo adesso f in $D_1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$, il cerchio unitario nel piano x, y. Consideriamo la restrizione di f al piano $\{z = 0\}$: $g(x, y) = f(x, y, 0) = x^2 + 2y^2$. Il problema si riduce adesso allo studio della funzione di due variabili g sul cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$. Invece del Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, useremo la seguente osservazione: se $x^2 + y^2 = 1$, allora $y \in [-1, 1]$ e $1 \leq g(x, y) = 1 + y^2 \leq 2$. Il minimo di g si ottiene per $y = 0$ (e quindi $x = \pm 1$) e il massimo per $y = \pm 1$ (e quindi $x = 0$). Abbiamo che $f(\pm 1, 0, 0) = 1$ e $f(0, \pm 1, 0) = 2$.

Poiché $f(M) = 3$, $f(P_\pm) = \frac{11}{12}$, $f(Q_\pm) = \frac{5}{3}$, ottengo che il valore di minimo/massimo assoluto di f in D è $\frac{11}{12}/3$ ed è assunto in $P_\pm/M$ rispettivamente.
Poiché $f(x, y, z) \geq 0$, il valore di minimo assoluto di f su D' è zero ed è raggiunto solo in $(0, 0, 0)$. Fissati x_0, y_0 tali che $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$, osserviamo inoltre che $z \to f(x_0, y_0, z) = x_0^2 + 2y_0^2 + 3z^2$ è crescente in $0 \leq z \leq 1 - x_0^2 - y_0^2$. Quindi il valore di massimo assoluto di f su D' coincide con quello su D.