Appello A di AM3 - 5/6/2007

1) Sia

$$f(\xi,\eta)=\begin{cases} \frac{\sin^4\xi+1-\cos(\eta^2)}{\xi^2+\eta^2} & \text{se } (\xi,\eta)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (\xi,\eta)=(0,0).\end{cases}$$

Allora:
a) discutere la continuitá e differenziabilitá di $f(\xi,\eta)$ in $(0,0)$;
b) provare o confutare l'affermazione $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$;
c) determinare se la forma $\omega=f(x,y)dx+f(y,x)dy$ è esatta (coloro che recuperano il primo esonero non rispondono al punto (c)).

2) Sia $F(x,y,z)=(y+1)\sin x+y^2z+(x+1)\ln(1+z)$. Allora:
(a) rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{F=0\}$ localmente in $p_0=(0,0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga;
(b) trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto a zero.

3) Sia $f(x,y,z)=xy+2yz+2xz$ e $D=\{(x,y,z):\ x,y,z\geq 0\ ,\ xyz=V\}$, ove $V>0$ è una costante fissata. Determinare estremo inferiore/superiore di $f(x,y,z)$ in D e discutere se viene raggiunto oppure no.

4) Per quali valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot y-5\dot y+6y=e^{2x}\\ y(0)=0,\ \dot y(0)=\lambda\end{cases}$$

verifica la relazione

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=-\infty.$$

5) Siano $\omega=(-y+\sin z)dx+(x+z)dy+(x^2+1)dz$ e $S=\{(x,y,z):0<z=1-\sin^2x-y^2, |x|\leq\frac{\pi}{2}\}$. Verificare la validitá del Teorema di Stokes per la $1-$forma ω sulla superficie S.

6) Calcolare

$$\int_E(z^2-y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ove E è il cono con vertice $(0,1,0)$ e base l'ellisse $x^2+\frac{z^2}{9}\leq 1$, contenuta nel piano $y=0$.

N.B. Coloro che intendono recuperare il primo/secondo esonero dovranno svolgere i primi/secondi tre esercizi nel tempo massimo di due ore. Tutti gli altri avranno invece a disposizione tre ore per svolgere 5 esercizi a scelta (all'inizio del compito indicare espressamente quali sono gli esercizi scelti e svolti).