Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM2 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Andrea Agnesse e Filippo Cavallari
http://andynaz.altervista.org/

Soluzioni del tutorato 4 del 20.11.2006

Esercizio 1 Consideriamo la funzione lungo le parabole $x = my^2$:

$$f(my^2, y) = \frac{|y|^{2\alpha+\beta}|m|^{\alpha}}{(y)^{8\gamma}\left(7m^2+2\right)^{\gamma}}$$ che è discontinua per $2\alpha+\beta \le 8\gamma$.

Supponiamo, invece, $2\alpha+\beta > 8\gamma$. Dalle disuguaglianze

$$|x|^{\alpha} = \left(\sqrt[4]{x^4}\right)^{\alpha} \le \left(\sqrt[4]{7x^4+2y^8}\right)^{\alpha} = \left(7x^4+2y^8\right)^{\frac{\alpha}{4}}$$

$$|y|^{\beta} = \left(\sqrt[8]{x^8}\right)^{\beta} \le \left(\sqrt[8]{7x^4+2y^8}\right)^{\beta} = \left(7x^4+2y^8\right)^{\frac{\beta}{8}}$$

si ottiene

$$0 \le \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{\left(7x^4+2y^8\right)^{\gamma}} \le \frac{\left(7x^4+2y^8\right)^{\frac{2\alpha+\beta}{8}}}{\left(7x^4+2y^8\right)^{\gamma}} = \left(x^4+y^2\right)^{\frac{2\alpha+\beta}{8}-\gamma} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$ in quanto $2\alpha+\beta > 8\gamma$.

Esercizio 2 Fissato y la funzione $x \to |xy|$ è derivabile $\forall x \ne 0$ se $y \ne 0$ e $\forall x$ se $y = 0$. Abbiamo quindi che $\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste $\forall x \in A$ dove $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ne 0\right\} \cup \left\{(0,0)\right\}$. Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste $\forall y \in B$ dove $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ne 0\right\} \cup \left\{(0,0)\right\}$.

Esercizio 3 Dalla disuguaglianza $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$ otteniamo

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)}\right| = \frac{|x|}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

La funzione può quindi essere estesa nell'origine a una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(0,0)=0$. La funzione ammette tutte le derivate direzionali nell' origine. Infatti $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{(v_1^2 + v_2^2)}$$

da cui, in particolare, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$. La funzione non è tuttavia differenziabile, infatti posto

$$g(h,k)=\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\|(h,k)\|}=\frac{h^2k}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

si vede facilmente che $\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k)\neq 0$. Infatti $g(h,h)=\frac{h^3}{\left(2h^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{h^3}{2\sqrt{2}|h|^3}\not\to 0$ per $h\to 0$.

Esercizio 4 $f(x,y)$ è costante rispetto alla x. Questo implica che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Inoltre esiste anche $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0}k\cos\frac{1}{k}=0 & y=0\\ 2y\cos\frac{1}{y}+\sin\frac{1}{y} & y\neq 0\end{cases}$$

Ovviamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ non è continua in quanto non esiste $\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Risulta tuttavia che la funzione è differenziabile in $(x,0)$. Infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{f(x+h,k)-f(x,0)-\langle \nabla f(x,0),(h,k)\rangle}{\|(h,k)\|}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{k^2\cos\frac{1}{k}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq$$

$$\leq\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^2+h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}=0$$

Ricordiamo che a lezione si è visto che la continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità. Ovviamente questo teorema non è invertibile (come mostra questo esercizio). Quindi la differenziabilità è condizione NECESSARIA ma non SUFFICIENTE affinché le derivate parziali siano continue.

Esercizio 5 La continuità segue banalmente dal limite notevole $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$. Si ha inoltre che esistono le derivate parziali nell'origine. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin|h|}{|h|}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin|h|-|h|}{h|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{o(h^2)}{h|h|}=0$$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Studiamo la differenziabilità nell'origine:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\sin\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}-1}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{h^2+k^2}-\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{o(t^2)}{t^2} = 0$$

Pertanto la funzione è differenziabile nell'origine.

Esercizio 6 (a) Dato che $f(x,0)=f(0,y)=0$ segue che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Studiamo la differenziabilità nell'origine:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{2}\left(h^2+k^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}\ \text{S}$$

upponiamo invece $\alpha \le \dfrac{1}{2}$ e sia $g(h,k)=\dfrac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Banalmente si verifica che $g(h,k)\not\to 0$ per $(h,k)\to(0,0)$. Basta infatti considerare $g(h,h)=\dfrac{h^{2\alpha}}{2|h|}=\dfrac{1}{2}|h|^{2\alpha-1}\to\infty$.

(b) Dato che $f(x,0)=f(0,y)=0$ segue che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Sia $g(h,k)=\dfrac{f(h,k)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\|(h,k)\|}=\dfrac{|h|^\alpha |k|^\beta}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Consideriamo tale funzione lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante: $g(h,h)=\dfrac{|h|^{\alpha+\beta}}{\left(\sqrt{2}|h|\right)^3}$ che è discontinua per $\alpha+\beta\le 3$.

Supponiamo, invece, $\alpha+\beta>3$. Dalle disuguaglianze

$$|h|^\alpha=\left(\sqrt{h^2}\right)^\alpha \le \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^\alpha = \left(h^2+k^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad |k|^\beta=\left(\sqrt{k^2}\right)^\beta \le \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^\beta = \left(h^2+k^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

si ottiene

$$0 \le \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{\left(h^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{\left(h^2+h^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\left(h^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(h^2+h^2\right)^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0 \text{ in quanto } \alpha+\beta>3.$$

Esercizio 7 È immediato verificare che $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)$. La funzione è continua nell'origine. Infatti:

$$\left|\frac{x^4y^3}{x^8+y^4}\right| \le \frac{|y|}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Dato che $f(x,0)=f(0,y)=0$ segue che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Studiamo la differenziabilità nell'origine:

$$\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\|(h,k)\|}\right|=\frac{x^4|y|^3}{\left(x^8+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2x^2|y|^3\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^8+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)}\le\frac{x^2|y|^3}{\left(x^8+y^4\right)}\sqrt{x^2+y^2}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder si ottiene $x^2|y|^3\le\frac{\left(x^2\right)^4}{4}+\frac{3\left(|y|^3\right)^{\frac{4}{3}}}{4}$ da cui

$$\frac{x^2|y|^3}{\left(x^8+y^4\right)}\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{\frac{x^8+3y^4}{4}}{\left(x^8+y^4\right)}\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

La funzione risulta quindi differenziabile nell'origine. Utilizzando le regole di derivazione si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x^3y^3}{x^8+y^4}-\frac{8x^{11}y^3}{\left(x^8+y^4\right)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3x^4y^2}{x^8+y^4}-\frac{4x^4y^6}{\left(x^8+y^4\right)^2}$$

dai cui $f\notin C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ perché $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)=\frac{1}{2}$.