Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM2 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Andrea Agnesse e Filippo Cavallari
http://andynaz.altervista.org/

Tutorato 4 del 20.11.2006

Esercizio 1 Si dica per quali $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ la seguente funzione è continua:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\left(7x^4 + 2y^8\right)^\gamma} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 2 In quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esistono le derivate parziali di $f(x,y) = |xy|$?

Esercizio 3 Dopo aver verificato che la seguente funzione ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$ estenderla per continuità e verificare che nell'origine e derivabile lungo ogni direzione ma tuttavia non è ivi differenziabile

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 4 Data la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cos \dfrac{1}{y} & se \quad y \neq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Verificare che tale funzione è continua e differenziabile nell' origine ma non ammette derivate parziali continue. Questo contraddice quanto visto a lezione?

Esercizio 5 Discutere continuità e differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$

Esercizio 6 Dire per quali α e β le seguenti funzioni sono differenziabili nell' origine

$$f(x,y) = |xy|^\alpha \qquad\qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Esercizio 7 Data la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^3}{x^8+y^4} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

Discuterne continuità, derivabilità e differenziabilità. Stabilire inoltre se $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.
(*Suggerimento*: può essere utile utilizzare la seguente disuguaglianza dovuta a Young:

Se p,q sono reali maggiori di zero tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ allora $\forall x,y\in\mathbb{R}$ si ha che $|xy|\leq\frac{|x|^p}{p}+\frac{|y|^q}{q}$)