Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM2 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: Dott. Andrea Agnesse & Filippo Cavallari
http://andynaz.altervista.org/

Soluzioni del tutorato 2 del 9.10.2006

1. (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x x^n$

Prima di tutto vediamo quali punti $x \in \mathbb{R}$ verificano la condizione necessara di convergenza delle serie (in modo da poter escludere direttamente gli altri):

$x \geq 1$: $n^x x^n \geq n \to +\infty$ (da escludere);
$0 < x < 1$: $n^x x^n \to 0$ (da verificare);
$x = 0$: $n^x x^n = 0$ e dunque la serie converge;
$-1 < x < 0$: $n^x x^n \to 0$ (da verificare);
$x = -1$: $n^x x^n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ e $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibniz;
$x < -1$: $n^x x^n = n^x |x|^n (-1)^n$ non converge (da escludere).

Ci rimane dunque da studiare il comportamento della serie nel caso in cui $|x| \in (0,1)$:

$0 < x < 1$: utilizzando il criterio della radice otteniamo che

$$\sqrt[n]{n^x x^n} = \sqrt[n]{n^x}x = (\sqrt[n]{n})^x x \to 1^x x = x < 1$$

dunque converge;

$-1 < x < 0$: ponendo $y = |x|$ otteniamo che $\sum n^x x^n = \sum \frac{y^n}{n^y}(-1)^n$, che converge per Leibniz.

Quindi $E = [-1, 1)$.

Per studiare infine la convergenza totale consideriamo $|n^x x^n| = n^x |x|^n$, che converge nel caso in cui $|x| < 1$, per cui la convergenza della serie è totale in ogni insieme $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}$: $E = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; totale in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > 1$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\ln n}$: $E = [0, \frac{1}{e})$; totale in $[0, a]$ con $0 < a < \frac{1}{e}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^4 + x^2}$: $E = \mathbb{R}$; totale in E

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \sqrt[n]{1 + \frac{x}{n}}$: $E = (-1, +\infty)$; totale in ogni $K \subset E$ compatto

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}$: $E = \mathbb{R}$; totale in E

2. (a) Per dimostrare la convergenza puntuale basta notare che, fissato $x \in (0, 1]$, $f_n(x) = 0$ definitivamente ($\forall\ n > \left[\frac{1}{x}\right]$); nel caso in cui $x = 0$ il discorso è analogo (in questo caso l'ugualianza è verificata $\forall\ n$); dunque la successione converge alla funzione $f(x) \equiv 0$.
Fissato $n > 1$, troviamo che

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_x |f(x)\chi_{\left[0,\frac{1}{n+1}\right)\cup\left(\frac{1}{n},1\right]}(x)| = 1 \not\to 0$$

dove la prima ugualianza è vera in quanto gli intervalli $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ sono tutti disgiunti[1] e la seconda è per esempio assunta nel punto $x = \frac{2}{3}$, dunque la convergenza non è uniforme.

(b) Ovviamente

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(x) \text{ puntualmente}$$

in quanto gli intervalli $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ sono tutti disgiunti. Possiamo dunque scrivere $S(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} \notin C([0, 1])$.
Per dimostrare che la convergenza non è uniforme in $[0, 1]$ è possibile procedere come per il punto 2a, ovvero fissare n, trovare il sup etc etc... In questo caso è però più semplice notare che le f_n sono continue, dunque lo sono le S_n (perchè somme *finite* di funzioni continue), e che se la convergenza fosse uniforme anche S sarebbe continua, mentre invece non lo è, dunque la convergenza non è uniforme.
Per far vedere invece che, restringendosi all'intervallo $\left[\frac{1}{6}, 1\right]$ la convergenza è uniforme, notiamo che $S_n(x) = S(x)\chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]}(x)$ e dunque $|S_n(x) - S(x)| \equiv 0\ \forall\ n \leq 5$ e $\forall\ x \in \left[\frac{1}{6}, 1\right]$.

[1] sono i supporti delle funzioni f_n

3. Sia $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]}(x)$, $x \in [0,1]$.
Banalmente $S_n = \sum_1^n f_i(x) \to S = \sum_1^{+\infty} f_i(x)$, in quanto gli intervalli $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ sono tutti disgiunti, ovvero fissato $x \in [0,1]$ abbiamo che i valori di $f_i(x)$ sono tutti nulli tranne al più uno (per la precisione $f_{\left[\frac{1}{x}\right]}(x)$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera).
Fissato n, troviamo che

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_x |\sum_1^\infty f_i(x) - \sum_1^n f_i(x)| = \sup_x \sum_{n+1}^\infty f_i(x) =$$
$$= \sup_x \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{i}\chi_{\left(\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\right]}(x) = \frac{1}{n+1} \to 0$$

e dunque la convergenza è uniforme.
La convergenza però non è totale, perchè

$$\sum_1^\infty \sup_x |f_i(x)| = \sum_1^\infty \frac{1}{i} = +\infty$$

4. Sia $f_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$; chiaramente la convergenza è uniforme ma non totale.