AM2 2006-2007: II ESONERO

TEMA 1. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile in $u \in \mathbf{R}^n$.

Provare che f é continua in u e

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, \ \exists \ \frac{\partial f}{\partial h}(u) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial h}(u) \ = < \nabla f(u), h >$$

Mostrare con un esempio che una funzione continua puó essere dotata di derivate direzionali in ogni punto e non essere differenziabile in qualche punto.

TEMA 2.

Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, e $x \in \mathbf{R}^n$ tale che $\nabla f(x) = 0$. Provare che

$$< H_f(x)\, h, h > \ > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \ h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad x \ \text{ é punto di minimo (locale)}$$

TEMA 3. Siano $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$.

Sia $\Gamma \ = \ \{g = 0\}$ e $\nabla g(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$.

Sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \Gamma$. Provare che

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{R} : \qquad \nabla f(x_0, y_0) \ = \ \lambda \nabla g(x_0, y_0) \qquad (*)$$

Mostrare con un esempio che se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ $(*)$ puó non verificarsi.

TEMA 4. Siano $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$.

Provare che esiste $T > 0$ ed esistono due funzioni di classe $C^1([-T, T])$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ tali che

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) \quad \forall t \in (-T, T)$$

Provare che , se f dipende solo dalla x e g dipende solo dalla y, allora lo stesso risultato vale anche se f e g sono solamente continue.

ESERCIZIO 1

Sia $\quad f(x,y) = \int\limits_x^y e^{-t^2} dt.$

Calcolare massimo e minimo valore di f in $\quad \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$

ESERCIZIO 2

Sia $\quad f(x,y) = (x^2-y^2)^2(2y-x^2) \qquad .$

Determinare i punti stazionari di f e determinare tra questi i punti di minimo o massimo locale.

ESERCIZIO 3

Sia f come nell'esercizio 2.

Dire per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\Gamma_c = \{(x,y): \quad f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano. Giustificare la risposta.

Provare poi, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_2 ha retta tangente nel punto $(0,1)$ e scrivere la retta tangente a Γ_1 in tale punto.

Provare infine, utilizzando il Teorema del Dini, che $\Gamma_2 7$ ammette vettore normale in $(1,2)$ e calcolarlo.

ESERCIZIO 4

Sia $f(x,y,z) = \frac{x^2 y z^{\frac{2}{3}}}{x^4+y^2+z^4}, \quad f(0,0,0) = 0.$

Calcolare, se esistono, le derivate parziali, le derivate direzionali, il differenziale di f in $(0,0,0)$.