Esecitazione AM2 n.7 -A.A. 2006-2007- 14/11/06

Massimi e minimi liberi e vincolati di funzioni in piú variabili

1. Determinare gli eventuali punti di estremo libero delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$ in $\mathbb{R}^2$;
   (b) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ in $\mathbb{R}^2$;
   (c) $f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2$ nel suo dominio ($D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > -1\}$).
   (d) $f(x,y) = x^2y^2 - x^4 + 2x^2$ in $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ -2 \leq x \leq 2\ \}$.

2. Si determinino gli estremi di:
   $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - \frac{1}{2}xy$ sotto il vincolo $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

3. Si determinino gli estremi di:
   $f(x,y) = 4x(x^2-y^2) - 3x^2 + y^2$ sotto il vincolo $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$.

4. Si determinino gli estremi di:
   $f(x,y) = xy$ sotto il vincolo $x^2 + 4y^2 = 8$.

5. Tra tutti i parallelepipedi di superficie laterale data trovare quello di volume massimo.

Soluzioni

1. (a) La f é di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ pertanto gli eventuali punti di estremo di f devono essere punti stazionari. Calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4;$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}, \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = -y \\ 4x^3 + 8x = 0 \end{cases},$$

$\begin{cases} x = -y \\ 4x(x^2+2) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$. Per tanto risultano $O(0,0)$, $P_1(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $P_2(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ punti stazionari, studiamo la natura di tali punti considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(P_1) = \mathbf{H}_f(P_2) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_1) = \det \mathbf{H}_f(P_2) = 384 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = 20 > 0$, i punti P_1 e P_2 sono di minimo locale;

$$\mathbf{H}_f(O) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(O) = 0$ il test sull'Hessiana non da informazioni sulla natura del punto, é richiesta un'ulteriore analisi. Esaminiamo il segno dell'incremento in un intorno del punto O $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2 - 2 = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$, sulla retta $y = x$ si ha:

$\Delta f = 2x^4 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi su tale retta per l'origine O é un punto di minimo. Sulla retta $y = -x$ si ha:

$\Delta f = 2x^4 - 8x^2 \leq 0$ se $|x| \leq 2$ quindi su tale retta O é punto di massimo. In conclusione O é un punto di sella.

(b) La funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ é a simmetria radiale cioé funzione di $r = \sqrt{x^2+y^2}$, per cui $f(x,y) = g(r) = r^2e^{-r^2}$, $r \geq 0$. Risulta $g(0) = 0$, $\lim_{r\to+\infty} g(r) = 0$ e $g(r) > 0$ per ogni $r \neq 0$ quindi 0 é un punto di minimo globale o assoluto per g; $g'(r) = 2re^{-r^2} - 2rr^2e^{-r^2} = 2re^{-r^2}(1-r^2)$, $g'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1, r = -1$ (non accettabile), quindi l'unico punto stazionario é $r = 1$ che risulta un massimo globale o assoluto per g. In conclusione: per $r = 0$ abbiamo (0,0) che risulta punto minimo globale per f, $f(0,0) = 0$ minimo, per $r = 1$ abbiamo la circonferenza di raggio unitario e centro l'origine che sono punti di massimo, $f(x,y) = g(1) = \frac{1}{e}$ massimo.

(c) La funzione é di classe $C^\infty(D)$ pertanto gli eventuali punti di estremo di f devono essere punti stazionari. Calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(\log(1+y)+y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\Big(\frac{1}{1+y}+2y\Big);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(\log(1+y)+y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2\Big(-\frac{1}{(1+y)^2}+2\Big),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x\Big(\frac{1}{1+y}+2y\Big);$$

$\begin{cases} 2x(\log(1+y)+y^2) = 0 \\ x^2\left(\frac{1}{1+y}+2y\right) = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \quad \text{con}\, k > -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} \frac{1}{1+y}+2y = 0 \\ 2x(\log(1+y)+y^2) = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \quad \text{con}\, k > -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2y(1+y)+1 = 0 \\ 2x(\log(1+y)+y^2) = 0 \end{cases}$, quindi i punti stazionari sono gli infiniti $P_k(0,k)$, $k > -1$; studiamo la natura di tale punto considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(P_k) = \begin{pmatrix} 2(\log(1+k)+k^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_k) = 0$ il test é inefficace. Esaminiamo il segno dell'incremento in un intorno di P_k:
$\Delta f = f(x,y) - f(0,k) = f(x,y) = x^2(\log(1+y)+y^2)$; per studiare il segno basta studiare il segno di $\log(1+y)+y^2 = z$ e risulta $z \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > 0$, $z \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < y < 0$. Dunque se $k > 0$ i punti P_k sono di minimo locale, se $-1 < y < 0$ i punti P_k sono di massimo locale; l'origine é chiaramente un punto di sella. Infine osserviamo che f non ha punti di estremo globale poiché:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } -1 < y_0 < 0 \end{cases}$$

quindi $\sup f(x,y) = +\infty, \quad \inf f(x,y) = -\infty$.

(d) Calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 - 4x^3 + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 y;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 - 12x + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy;$$

$\begin{cases} 2xy^2 - 4x^3 + 4x = 0 \\ x^2y = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \quad \text{con}\, k \in \mathbb{R} \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 0 \\ -4x^3 + 4x = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \quad \text{con}\, k \in \mathbb{R} \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 0 \\ x(x^2-1) = 0 \end{cases}$, quindi i punti stazionari sono gli infiniti $P_k(0,k)$, $k \in \mathbb{R}$, $Q_1(1,0)$ e $Q_2(-1,0)$; studiamo la natura di tale punto considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(Q_1) = \mathbf{H}_f(Q_2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_k) = -16$ i punti Q_1 e Q_2 sono di sella;

$$\mathbf{H}_f(P_k) = \begin{pmatrix} 2k^2+4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_k) = 0$ il test é inefficace. Esaminiamo il segno dell'incremento in un intorno di P_k:
$\Delta f = f(x,y) - f(0,k) = f(x,y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2y^2 - x^4 + 2x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y^2 - x^2 + 2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 \geq x^2 - 2$ allora f é positiva. I punti $(0,k)$ sono di minimo relativo. Se consideriamo f sulla retta $x = -2$ si ha: $f = 4y^2 - 16 + 8 = 4y^2 - 8$ che ha un minimo in $y = 0$, perché é una parabola con vertice nell'origine, $Q_3(-2,0)$; questo ci dice che non ci sono massimi assoluti; se consideriamo f sulla retta $x = 2$ si ha: $f = 4y^2 - 16 + 8 = 4y^2 - 8$ che ha un minimo in $y = 0$, $Q_4(2,0)$ e $f(Q_3) = f(Q_4) = -8$, Q_3 e Q_4 minimi assoluti.

2. Il vincolo é un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ che si parametrizza $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi)$ (in generale un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si parametrizza $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi)$) ed é compatto ed f é continua, per Weierstrass esistono massimo e minimo globale. $f(x(t), y(t)) = g(t) = 4\cos^2 t + 5\sin^2 t - \sin t \cos t$ e ricordando che

$$2\cos\alpha \sin\alpha = \sin 2\alpha$$

e

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

risulta $f(x(t), y(t)) = g(t) = 4\frac{\cos 2t+1}{2} + 5\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{\sin 2t}{2} = 2\cos 2t + 2 + \frac{5}{2} - \frac{5\cos 2t}{2} - \frac{\sin 2t}{2} = \frac{9}{2} - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\sin 2t}{2}$. Calcoliamo:
$g'(t) = \sin 2t - \cos 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$
e dunque $g(\frac{\pi}{8}) = g(\frac{9\pi}{8}) = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di minimo globale per g e $g(\frac{5\pi}{8}) = g(\frac{13\pi}{8}) = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di massimo globale per g. Risuta $\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ massimo di f vincolato all'ellisse e $\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ massimo.

3. Ricaviamo $y^2 = x^2 - \frac{1}{4}$ con $|x| \geq 1$, $f(x,y) = g(x) = 4x(x^2 - x^2 + \frac{1}{4}) - 3x^2 + x^2 - \frac{1}{4} = x - 2x^2 - \frac{1}{4} = -2x^2 + x - \frac{1}{4}$ con $|x| \geq \frac{1}{2}$, il grafico di g é due archi di parabola di vertice $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Risulta $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$, g é illimitata inferiormente, $g(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$, $g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, il massimo di g é $-\frac{1}{4}$. Dunque la f vincolata non ammette minimo, ma ammette massimo globale $-\frac{1}{4}$ assunto in $(\frac{1}{2}, 0)$, inoltre il punto $(-\frac{1}{2}, 0)$ é di massimo locale per f vincolata.

4. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, la Lagrangiana del problema é
$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 8)$$
i punti critici sono soluzioni di:
$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 8 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = -2\lambda x \\ x = -16\lambda^2 x \\ x^2 + 4y^2 - 8 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \lambda = \pm\frac{1}{4} \\ y = \mp\frac{1}{2}x \\ x^2 + x^2 - 8 = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} \lambda = \pm\frac{1}{4} \\ x = \pm 2 \\ y = \mp 1 \end{cases}$ per tanto risultano
$P_1(2,1)$, $P_2(2,-1)$, $P_3(-2,1)$, $P_4(-2,-1)$ punti critici e poiché $f(P_1) = f(P_3) = -2$ e $f(P_2) = f(P_4) = 2$ P_1 e P_3 sono punti di minimo e P_2 e P_4 sono di massimo vincolato di f.

5. Dobbiamo minimizzare la funzione volume $f(x,y,z) = xyz \geq 0$ sotto il vincolo $S = 2xy + 2yz + 2xz$ e poiché il vincolo non é compatto potremo anche non avere massimi e minimi. Osserviamo che per $z = 0$, $xy = \frac{S}{2}$, lungo questa iperbole la f fa zero. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, la Lagrangiana del problema é
$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz - S)$$

i punti critici sono soluzioni di:
$\begin{cases} yz+\lambda(2z+2y)=0 \\ xz+\lambda(2x+2z)=0 \\ xy+\lambda(2x+2y)=0 \\ 2xy+2yz+2yz-S=0 \end{cases}$, $\begin{cases} xyz+\lambda x(2z+2y)=0 \\ xyz+\lambda y(2x+2z)=0 \\ xyz+\lambda z(2x+2y)=0 \\ 2xy+2yz+2yz-S=0 \end{cases}$, $2\lambda z(x-y)=0$,

$\begin{cases} z=0 \\ \lambda=0 \\ xyz+\lambda z(2x+2y)=0 \\ 2xy+2yz+2yz-S=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=y \\ x^2+4\lambda x=0 \\ xyz+\lambda z(2x+2y)=0 \\ 2xy+2yz+2yz-S=0 \end{cases}$ da cui il primo sistema non ci da soluzioni sul vincolo e rimane:
$\begin{cases} x=y=0 \\ x=0 \\ xyz+\lambda z(2x+2y)=0 \\ 2xy+2yz+2yz-S=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=y \\ x=-4\lambda \\ xyz+\lambda z(2x+2y)=0 \\ 2xy+2yz+2yz-S=0 \end{cases}$ ovvero il problema é simmetrico $\begin{cases} y=-4\lambda \\ x=-4\lambda \\ z=-4\lambda \\ 6x^2=S, x=\pm\sqrt{\frac{S}{6}} \end{cases}$. Per tanto il valore negativo non ha senso e risulta punto stazionaro $P\left(\sqrt{\frac{S}{6}},\sqrt{\frac{S}{6}},\sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ e $f(P)=\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3$. Dobbiamo verificare che é un massimo: osserviamo che é l'unico punto stazionario accettabile in quanto $x=y=z=0$ é da scartare, verifichiamo che non é di sella:
se $z=0$ che $f\to 0$ e se $z\to\infty$ che $f\to 0$ allora il punto é di massimo. Infatti fissiamo $x,y\geq 0$, $xz\leq xz+yz=\frac{S}{2}-xy$ (oppure $yz\leq xz+yz$) $x<\frac{k(x,y)}{z}$, analogamente $y<\frac{k(x,y)}{z}$, allora $f(x,y,z)=xyz\leq z\frac{k(x,y)}{z}\frac{k(x,y)}{z}=\frac{(k(x,y))^2}{z}\to 0$ se $z\to\infty$. Osserviamo che abbiamo ottenuto un cubo di lato $\sqrt{\frac{S}{2}}$.

Lavoro per casa

1. Determinare gli eventuali punti di estremo libero delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+xyz$ in $\mathbb{R}^3$;

   (b) $f(x,y,z)=x^2(y-1)^3(z+2)^2$ in $\mathbb{R}^3$.

2. Determinare gli estremi liberi di $f(x,y) = |y-1|(2-y-x^2)$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < y < 2 - x^2 - y^2\ \}$.

3. Determinare gli estremi liberi di $f(x,y) = x^2+3y^2-xy-y$ nell'insieme $Q = [0,1] \times [0,1]$.

4. Si determinino gli estremi di:
$f(x,y,z) = x + y - \sqrt{6}z$ sotto il vincolo $x^2 - +y^2 + z^2 = 1$.