Esecitazione AM2 n.6-A.A. 2006-2007- 11/12/06

Massimi e minimi liberi e vincolati di funzioni in piú variabili

1. Determinare i punti di massimo e di minimo locale delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = xy - y - 1$ in $\mathbb{R}^2$;

   (b) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$ in $\mathbb{R}^2$;

   (c) $f(x,y) = (|x| + y)e^{-xy}$ in $\mathbb{R}^2$.

2. Calcolare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$ in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Calcolare i massimi e i minimi locali della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2$ in $\mathbb{R}^3$.

4. Si determinino gli estremi di $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$ sotto il vincolo $g:\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

5. Sia $g(x,y,z) = z^2 - xy - 1 = 0$, si determinino i punti della superficie $g = 0$ piú vicini all'origine.

Soluzioni

1. (a) Calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 1;$$

$\begin{cases} y+1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$. Per tanto risulta $P(1,-1)$ punto stazionario, studiamo la natura di tale punto considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(1,-1) = -1 < 0$, il punto $P(1,-1)$ non é ne di minimo ne di massimo.

(b) Calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0;$$

$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$. Per tanto risultano $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,1)$, $P_4(1,-1)$ punti stazionari, studiamo la natura di tali punti considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_1) = -36 < 0$, il punto P_1 non é ne di minimo ne di massimo;

$$\mathbf{H}_f(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_2) = 36 > 0$ e il termine $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 < 0$, il punto P_2 é di massimo locale per f;

$$\mathbf{H}_f(P_3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_3) = 36 > 0$ e il termine $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$, il punto P_3 é di minimo locale per f;

$$\mathbf{H}_f(P_4) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_4) = -36 < 0$, il punto P_4 non é ne di minimo ne di massimo.

(c) Risulta:
$\begin{cases} (x+y)e^{-xy} & \text{se } x > 0 \\ (-x+y)e^{-xy} & \text{se } x < 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases}$ dobbiamo studiare cosa succede per

$x > 0,\ x < 0,\ \ x = 0.$
Studiamo f in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-xy} - y(x+y)e^{-xy},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-xy} - x(x+y)e^{-xy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -ye^{-xy} - ye^{-xy} + y^2(x+y)e^{-xy} = -2ye^{-xy} + y^2(x+y)e^{-xy},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -xe^{-xy} - xe^{-xy} + x^2(x+y)e^{-xy}\\ &= -2xe^{-xy} + x^2(x+y)e^{-xy},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -ye^{-xy} - (x+y)e^{-xy} - ye^{-xy} + xy(x+y)e^{-xy}\\ &= -2xe^{-xy} - 2ye^{-xy} + xy(x+y)e^{-xy};\end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{-xy}(1 - y(x+y)) = 0 \\ e^{-xy}(1 - x(x+y)) = 0 \end{cases},\ \begin{cases} 1 - y(x+y) = 0 \\ 1 - x(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x+y) = x(x+y), (x+y)(y-x) = 0 \\ 1 = x(x+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 1 = 2x^2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = -x \\ 1 = 0 \end{cases},\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ Per tanto risulta $P_1\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$, punto stazionario, studiamo la natura di tale punto considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} & -\frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det \mathbf{H}_f(P_1) = \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{9}{2}e^{-1} = 4e^{-1} < 0$, il punto P_1 non é ne di minimo ne di massimo locale.
Analogamente studiando f in $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ si ottiene solo un altro punto stazionario che non é ne di minimo ne di massimo locale.
Consideriamo $P(0,y)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(P) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(|t| + y)e^{-ty} - y}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|t|e^{-ty} + y(e^{-ty} - 1)}{t} = \lim_{t\to 0} \Big(\frac{|t|e^{-ty}}{t} + \frac{-y^2(e^{-ty} - 1)}{-ty}\Big)\end{aligned}$$

e risulta $\lim_{t\to 0}\frac{-y^2(e^{-ty}-1)}{-ty} = -y^2$, mentre non esiste il limite $\lim_{t\to 0}\frac{|t|e^{-ty}}{t}$, pertanto neanche il nostro limite esiste. Dunque la f non dotata di derivata parziale rispetto ad x in $P_0(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$, se $y>y_0$ allora $f(0,y)=y>y_0=f(0,y_0)$, se $y<y_0$ allora $f(0,y)=y<y_0=f(0,y_0)$, tutti i punti del tipo P non sono ne di minimo ne di massimo locale.

2. Cerchiamo i punti stazionari di f all'interno di A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x-1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y,$$

$\begin{cases}4x-1=0\\2y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=0\end{cases}$ e $\begin{cases}x=1\\y=\pm1\end{cases}$. Per tanto risulta $P_0\Big(\frac{1}{4},0\Big)$, punto stazionario interno al dominio A.
Studiamo f ristretta alla frontiera di A parametrizzata $f_{|_{FrA}}$ $FrA=\varphi([0,2\pi])$, $\varphi:\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$:
per ogni $t\in[0,2\pi]$:
$f(\varphi(t))=2\cos^2 t+\sin^2 t-\cos t=F(t)$,
$F'(t)=-4\cos t\sin t+2\sin t\cos t+\sin t=-2\cos t\sin t+\sin t$
$0<t<2\pi\quad F'(t)=0\Leftrightarrow \sin t(-2\cos t+1)=0$
$(\sin t=0)\Leftrightarrow(t=\pi)$, $(\cos t=\frac{1}{2})\Leftrightarrow(t=\frac{\pi}{3})$ e $(t=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi)$;
$F(0)=F(2\pi)=1$.
Confrontiamo i valori di f nei punti trovati:
$P_0(\frac{1}{4},0), P_1(1,0), P_2(-1,0), P_3(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})P_4(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $f(P_0)=2\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$, $f(P_1)=1$, $f(P_2)=3$, $f(P_3)=f(P_4)=2\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. Per tanto P_0 é un punto di minimo globale (e locale) e P_2 é un punto di massimo globale.

3. Calcoliamo i punti stazionari ovvero dove si annulla il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x-2xy^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y-2x^2y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=2-2y^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=2-2x^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -4xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0;$$

$$\begin{cases} 2x(1-y^2) = 0 \\ 2y(1-x^2) = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y^2 = 1 \\ (x^2-1)2y = 0 \\ z = 0 \end{cases};$$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Per tanto risultano $P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,1,0)$, $P_3(1,-1,0)$, $P_4(-1,-1,0)$ punti stazionari, studiamo la natura di tali punti considerando la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & -4xy & 0 \\ -4xy & 2-2x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_f(P_1) - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det(\mathbf{H}_f(P_1) - \lambda I) = (\lambda - 2)^3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 > 0$ il punto P_1 é di minimo locale;

$$\mathbf{H}_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_f(P_2) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ -4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det(\mathbf{H}_f(P_2) - \lambda I) = \lambda^2(2-\lambda) - 16(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-16) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)$, $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -4 < 0$ $(m = \lambda_3 < 0 < M = \lambda_1)$ il punto P_2 non é ne di minimo ne di massimo locale;

$$\mathbf{H}_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_f(P_3) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det(\mathbf{H}_f(P_3)-\lambda I) = \lambda^2(2-\lambda)-16(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-16) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)$, $\lambda_1 = 2 > 0, \;\; \lambda_2 = 4, \;\; \lambda_3 = -4 < 0$ $(m = \lambda_3 < 0 < M = \lambda_1)$ il punto P_3 non é ne di minimo ne di massimo locale;

$$\mathbf{H}_f(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_f(P_4) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det(\mathbf{H}_f(P_4)-\lambda I) = \lambda^2(2-\lambda)-16(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-16) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)$, $\lambda_1 = 2 > 0, \;\; \lambda_2 = 4, \;\; \lambda_3 = -4 < 0$ $(m = \lambda_3 < 0 < M = \lambda_1)$ il punto P_4 non é ne di minimo ne di massimo locale;

$$\mathbf{H}_f(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_f(P_5) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ -4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

poiché il determinante $\det(\mathbf{H}_f(P_5)-\lambda I) = \lambda^2(2-\lambda)-16(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-16) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)$, $\lambda_1 = 2 > 0, \;\; \lambda_2 = 4, \;\; \lambda_3 = -4 < 0$ $(m = \lambda_3 < 0 < M = \lambda_1)$ il punto P_5 non é ne di minimo ne di massimo locale.

4. Risulta $f(x,y,z) \geq 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ per cui il minimo di f in $\mathbb{R}^3$ é 0 e i punti di minimo sono tutti i punti del piano $x+y+z=0$. Per tanto i punti di minimo di f sotto il vincolo $x^2+2y^2+3z^2=1$ saranno i punti della curva $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=1 \end{cases}$, f e g sono di classe C^∞ e il vincolo é compatto per cui per Weierstrass f é dotata di massimo globale, inoltre il vincolo non ha punti singolari. Posto $g(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-1$ i punti di massimo di f vincolati a $g=0$ si trovano tra i punti critici vincolati seguendo il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del problema é:

$$L(x,y,z,\lambda) = (x+y+z)^2 - \lambda(x^2+2y^2+3z^2-1)$$

i punti critici sono soluzioni di:
$\begin{cases} 2(x+y+z)-2\lambda x=0\\ 2(x+y+z)-4\lambda y=0\\ 2(x+y+z)-6\lambda z=0\\ x^2+2y^2+3z^2-1=0\end{cases}$, $\begin{cases} 2\lambda(x-2y)=0\\ 2\lambda(x-3z)=0\\ 2(x+y+z)-6\lambda z=0\\ x^2+2y^2+3z^2-1=0\end{cases}$ per $\lambda=0$ si ottengono i minimi giá determinati, per $\lambda\neq 0$

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x\\ z=\frac{1}{3}x\\ x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2-1=0\end{cases}$, $\begin{cases} y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}\\ z=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\\ x=\pm\sqrt{\frac{6}{11}}\end{cases}$,

per tanto risultano $\left(\pm\sqrt{\frac{6}{11}},\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}},\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$ punti di massimo e $f\left(\left(\pm\sqrt{\frac{6}{11}},\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}},\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right)\right)=\frac{11}{6}$ massimo vincolato di f.

5. Dobbiamo minimizzare la distanza dall'origine, o equivalentemente il quadrato della distanza. Il quadrato della distanza da un generico punto dello spazio (x,y,z) dall'origine é: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ occorre detrminare il minimo di f vincolata a $g=0$ e il vincolo é un chiuso quindi tale minimo esiste. Il vincolo non ha punti singolari, f e g sono di classe C^∞ utilizziamo il Metodo dei moltiplicatori di Lgrange. I punti di minimo vanno cercati tra i punti critici vincolati di f. La Lagrangiana del problema é:

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(z^2-xy-1)$$

i punti critici sono soluzioni di: $\begin{cases} 2x+\lambda y=0\\ 2y+\lambda x=0\\ 2z-2\lambda z=0\\ z^2-xy-1=0\end{cases}$, $\begin{cases} 2x^2-\lambda=0\\ -2+\lambda x^2=0\\ z=0\\ y=-\frac{1}{x}\end{cases}$

da cui per $\lambda=2$ e $x=\pm 1$ i punti critici sono $P_1(1,-1,0)$, $P_2(-1,1,0)$

$f(P_1)=f(P_2)=2$; per $\lambda=1$ $\begin{cases} 2x^2+y=0\\ 2y+x=0\\ z=0\\ \lambda=1\end{cases}$ si ha $x=y=0$ e i punti critici sono $P_3(0,0,1)$, $P_4(0,0,-1)$ $f(P_3)=f(P_4)=1$; pertanto i punti di minimo richiesti sono P_3 e P_4.

Lavoro per casa

1. Determinare i punti di massimo e di minimo locale delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x, y) = \cos x \sin y$ in $\mathbb{R}^2$;

   (b) $f(x, y) = x^4 + x^2 y + y^2 + 3$ in $\mathbb{R}^2$.

2. Calcolare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x, y) = 24x^4 + 3y^4 - (x - y)^2$ nel trangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = (1, 1)$.

3. Si determinino gli estremi della funzione
   $f(x, y, z) = x^2 - x + y^2 + y(z + x - 1)$ con i vincoli $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.