Esecitazione AM2 n.5-A.A. 2006-2007- 14/11/06

Differenziabilitá di funzioni in piú variabili

1. Estendere con continuitá, se é possibile, su tutto $\mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni:
   (a) $f(x,y) = \frac{\sin(3x-3x)}{x-y}$;
   (b) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$;
   (c) $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$;
   (d) $\frac{e^{x+y}-1}{2x+2y}$.

2. Calcolare $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}$ per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Sia
$$f(x) = f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$
   trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:
   (a) f sia continua nell'origine;
   (b) f abbia derivate direzionali nell'origine;
   (c) f sia differenziabile nell'origine.

4. Sia $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$, f é dotata di derivata direzionale in $\bar{x} = (1,1)$ lungo $v = (1,2)$?

5. Sia $f(x,y) = xy - y + x - 1$ in $\mathbb{R}^2$, verificare se é differenziabile e trovare la derivata direzionale in $\bar{x} = (0,1)$ lungo $v = (1,2)$.

6. Verificare per quali $\alpha > 0$ risulta differenziabile $f(x,y) = |x|^\alpha$.

7. Si verifichi che la funzione $f(x,y) = |x|\log(1+y)$ é differenziabile in $(0,0)$.

8. Calcolare derivate prime e seconde della funzione $f(x,y) = x^y$ e trovare il $\mathrm{d}^2 f(1,2)$.

9. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$ si verifichi che :

(a) non é differenziabile in $(0,1)$;

(b) si calcolino tutte le derivate direzionali in $(0,1)$, $D_v f(0,1) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,1)$, v versore di $\mathbb{R}^2$.

10. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} y \arctan(x^2+y^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) si stabilisca se é continua in $(0,0)$;

(b) si calcolino le derivate parziali in $(0,0)$.

Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é vero che se f ha derivate parziali in A allora é continua in A?

11. Si verifichi che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é continua e dotata di derivate parziali per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ma non é differenziabile in $(0,0)$.

Soluzioni

1. (a) La funzione é definita al di fuori della retta $y = x$, poniamo $t = x - y$. Ricordando che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 3x}{x} = 3$, possiamo estendere la f con continuitá sulla retta $y = x$ con $f(x,y) = 3$.

(b) La funzione é definita in tutto $\mathbb{R}^2$ tranne nell' origine. Risulta $|xy \log(x^2+y^2)| = |xy||\log(x^2+y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)|\log(x^2+y^2)| \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, infatti $(x^2-y^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq xy$ e $(x^2+y^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq -xy$. Basta quindi estendere in $(0,0)$ $f(0,0) = 0$ per estendere f.

(c) La funzione é definita al di fuori degli assi coordinati, osserviamo che sull'iperbole $xy = 1$, e su tutte le iperboli $xy = t$ per ogni $t > 0$, la f vale identicamente 1, mentre sulle iperboli $xy = t$ per $t < 0$, la f vale identicamente -1. Per tanto non esiste il limite di f sugli assi coordinati e dunque la f non si estende con continuitá.

(d) La funzione é definita al di fuori della retta $x + y = 0$, poniamo $t = x+y$. Osserviamo che $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{2t} = \frac{1}{2}$, dunque la f si estende ponendo $f(x,-x) = \frac{1}{2}$.

2. $f(x) = f(x_1, x_2) = |x|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, con $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x_1$ e per simmetria ricaviamo $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i} = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$ per $i = 1, 2$.

3. (a) La funzione f é positivamente omogenea di grado $2\alpha - \beta$, infatti $f(tx) = t^{2\alpha} \frac{|x_1x_2|^\alpha}{t^\beta |x|^\beta} = t^{2\alpha-\beta \frac{|x_1x_2|^\alpha}{|x|^\beta}} = t^{2\alpha-\beta} f(x)$. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice positivamente omogenea di grado α se per ogni $t > 0$ $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se una funzione é positivamente omogenea di grado α, continua e non identicamente costante allora puøessere estesa con cotinuitá su tutto $\mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0, f(0) = 0$. Dunque la nostra f é positivamente omogenea, continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ essendo composizione e prodotto di funzioni continue, quindi é continua su tutto $\mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha - \beta > 0$.

(b) La f ha derivate direzionali in $x_0 \Leftrightarrow$ esiste finito $\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$; per $x_0 = (0,0)$, $\lim_{t\to 0} \frac{f(tx)}{t} = \lim_{t\to 0} t^{2\alpha-\beta-1} f(x)$ e tale limite esiste finito se e solo se $2\alpha - \beta \geq 1$.

(c) La f é differenziabile se e solo se

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Dai calcoli precedenti risulta $\nabla f(x_0) = (0,0)$, quindi la differenziabilitá si riduce a provare che $\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(h)|}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1h_2|^\alpha}{|h|^{\beta+1}} \leq \lim_{|h|\to 0} \frac{|h|^{2\alpha}}{|h|^{\beta+1}} \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha - \beta > 1$. Se fosse $2\alpha - \beta < 1$ allora non esisterebbero le derivate direzionali quindi f non potrebbe essere differenziabile. Se $2\alpha - \beta = 1$ allora presa la successione $h_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ e il limite é diverso da 0.

4. Siano $v = (1,2)$, $\bar{x} = (1,1)$, $\bar{x} + tv = (1+t, 1+2t)$, $f(1+t, 1+2t) = \frac{1+t+1+2t}{(1+t)^2-(1+2t)^2+1}$, $f(1,1) = \frac{2}{3}$, consideriamo

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t, 1+2t) - f(1,1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\frac{2+3t}{1+t^2+2t+1+4t^2+4t+1} - \frac{2}{3}\Big]$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{6+9t-6-10t^2-12t}{3+5t^2+6t} = \infty$$

quindi non é dotato di derivata direzionale, perché tale limite non esiste finito.

5. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y+1, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-1,$$

esistono continue per tanto la f é differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Per calcolare la derivata direzionale in $(0,1)$ lungo $v=(1,2)$, consideriamo:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = (\nabla f(0,1)\,|\,(1,2)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)2 = 2-2 = 0.$$

6. La funzione é identicamente nulla su entrambi gli assi coordinati, per tanto $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. la condizione di differenziabilitá in $(0,0)$ é

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - L(0,0)}{|h|}$$
$$= \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{|h_1h_2|^\alpha}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$

con $h=(h_1,h_2)$, bisogna studiare la funzione $g(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Sulle rette $y=mx$ la g diventa

$$g(x,y) = |x|^{2\alpha-1}\frac{|m|^\alpha}{1+m^2}$$

se $\alpha < \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \infty$; se $\alpha = \frac{1}{2}$ il limite non esiste; se $\alpha > \frac{1}{2}$, osserviamo che $|x|^\alpha = (\sqrt{x}^2)^\alpha \le (\sqrt{x^2+y^2})^\alpha = (x^2+y^2)^\alpha$, da cui abbiamo:
$|f(x,y)| = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$. Quindi la f é differenziabile se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

7. Risulta $f(0,0)=0$ e la f nulla sugli assi: $f(x,0)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e $f(0,y)=0$ per ogni $y\in\mathbb{R}$, allora si deduce che $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Per tanto per la differenziabilitá in $(0,0)$ occorre dimostare che

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f_x(0,0)h_1-f_y(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1|\log(1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

Utilizzando le coordinate polari $h_1=\rho\cos\theta,\ \ h_2=\rho\sin\theta$ risulta

$$\frac{|h_1|\log(1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{\rho\cos\theta\log(1+\rho\sin\theta)}{\rho}\le\rho|\cos\theta\sin\theta|\to 0$$

per $\rho\to 0$, per cui la f é differenziabile in $(0,0)$.

8. Sia $f(x,y)=x^y$, abbiamo

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\ \ f_y(x,y)=x^y\log x,$$

$f_{xx}(x,y)=y(y-1)x^{y-2}$, $f_{xy}(x,y)=x^{y-1}(1+y\log x)$, $f_{yy}(x,y)=x^y(\log x)^2$, in particolare $f_{xx}(1,2)=2,\ \ f_{xy}(1,2)=1,\ \ f_{yy}(1,2)=0$. Allora risulta:

$$d^2f(1,2)=2\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9. (a) Sia $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2(y-1)}+1$, si ha $f(0,1)=1$ e poiché $f(x,1)=1$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e $f(0,y)=1$ per ogni $y\in\mathbb{R}$ risulta $f_x(0,1)=f_y(0,1)=0$. Calcoliamo

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,1+h_2)-f(0,1)-(\nabla f(0,1)\,|\,(h_1,h_2))}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^2h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}};$$

utilizzando le coordinate polari $h_1=\rho\sin\theta,\ \ h_2=\rho\sin\theta$, risulta

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^2h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt[3]{\rho^3(\cos\theta)^2\sin\theta}}{\rho}=\sqrt[3]{\rho^3(\cos\theta)^2\sin\theta}$$

limite che non é zero per cui la f non é differenziabile in $(0,1)$.

(b) Poniamo $g(t) = f(t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha) = t\sqrt[3]{(\cos\alpha)^2\sin\alpha} + 1$, si ha $g'(t) = \sqrt[3]{(\cos\alpha)^2\sin\alpha}$ da cui si ricava

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = g'(0) = \sqrt[3]{(\cos\alpha)^2\sin\alpha}.$$

10. (a) La funzione é discontinua in $(0,0)$, infatti se consideriamo la restrizione di f a $x = y^{\frac{3}{2}}$, $f(y^{\frac{3}{2}}, y) = y^{-2}\arctan(y^3 + y^2)$ abbiamo:

$$\lim_{y\to 0} f(y^{\frac{3}{2}}) = \lim_{y\to 0} y^{-2}\arctan(y^3 + y^2) = 1 \neq f(0,0).$$

(b) $f_x(x,y) = -2x^{-3}y\arctan(x^2+y^2) + x^{-2}y\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = x^{-2}\arctan(x^2+y^2) + x^{-2}y\frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$,

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$$

Come dimostra l'esercizio non é vero che se una funzione ha derivate parziali allora é continua.

11. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

la funzione é continua, infatti essendo $0 \leq \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{1}{2}$, si ha $0 \leq |f(x,y)| \leq |y| \to 0$, per $(x,y) \to (0,0)$.
per le derivate parziali, essendo $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$.
La f non é differenziabile in $(0,0)$ poiché $f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y = f(x,y)$ e non esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$ di $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.