Esecitazione AM2 n.1-A.A. 2006-2007- 03/11/06

Logaritmo e potenze ad esponente complesso

1. Calcolare: $Arg1$, $arg1$, $Argi$, $argi$, $arg(1+i)$, $Log1$, $Log(1+i)$.
2. Verificare che: $log(i-1)^2 \neq 2log(i-1)$.
3. Trovare le soluzioni di: $e^z = -\frac{i}{2}$, $e^z = 2+2i$.
4. Determinare i possibili valori di: i^i, $\sqrt[3]{1+i}$.

   Funzioni in piú variabili

5. Discutere la continuitá delle seguenti funzioni, utilizzando anche le restrizioni su opportune curve:

   (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

   (c) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

   (e) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$;

   (f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|\beta}{(x^4+y^2)^\gamma} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ trovare per quali α, β, γ é continua ;

   (g) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

   (h) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Esercizi di ricapitolazione

1. Studiare la convergenza semplice e uniforme delle seguenti successioni di funzioni: $f_n(x) = \frac{\sqrt{x}\log x^n}{1+nx}$, $g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ e verificare che $\lim_{n\to\infty} g_n'(x) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

2. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$ vale il teorema di derivazione per serie? Studiare la serie delle derivate.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2}$.

3. Dal teorema di integrazione per serie alla funzione $\log(1-x)$ si calcoli la somma della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

4. Trovare il raggio di convergenza e studiare il comportamento sul bordo delle serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^{4n}}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x+2)^n}{\sqrt{n}5^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x - 3)^n}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Big(2 + \cos n\Big) z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

5. Discutere la continuitá delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

   (b) $f(x,y) = xe^{-\frac{x}{y}}$.

6. Trovare le soluzioni di: $e^z = -1 - i$.

7. Determinare i possibili valori di: $(-1)^{2i}$.

Soluzioni

1. $Arg(1) = \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;
   $arg(1) = 0$;
   $Arg(i) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;
   $arg(i) = \frac{\pi}{2}$;
   $arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$;
   $Log(1) = \{2k\pi i | k \in \mathbb{Z}\}$;
   $Log(1+i) = \{\log\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $i - 1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$,
   $2\log(i-1) = 2(\log\sqrt{2} + i\frac{3}{4}\pi) = 2(\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{3}{4}\pi) = \log 2 + i\frac{3}{2}\pi$,
   $\log(i-1)^2 = \log(i^2 + 1 - 2i) = \log(-2i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$,
   quindi $2\log(i-1) = \log 2 + i\frac{3}{2}\pi \neq \log 2 - i\frac{\pi}{2} = \log(i-1)^2$.

3. (a) $e^z = -\frac{i}{2}$,
   $-\frac{i}{2} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$, $\log(-\frac{i}{2}) = \log\frac{1}{2} - i\frac{\pi}{2} = -\log 2 - i\frac{\pi}{2}$
   quindi
   $z = Log(-\frac{i}{2}) = -\log 2 - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) $e^z = 2 + 2i = 2(1+i)$,
   $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})$, $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = 2^{\frac{3}{2}}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$,
   $\log(2+2i) = \log 2^{\frac{3}{2}} - i\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4}$ quindi
   $z = Log(2+2i) = \frac{3}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

4. (a)
   $$i^i = e^{i(i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

   (b)
   $$\sqrt[3]{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}(\log\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = e^{i\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}2^{\frac{1}{6}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

   sono tre valori distinti

   $$z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}2^{\frac{1}{6}}, \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}2^{\frac{1}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{17\pi}{12}}2^{\frac{1}{6}},$$

   le radici si dispongono ai vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio $2^{\frac{1}{6}}$.

5. (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ risulta il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, infatti dalla definizione di limite segue che:
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ t. c. per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 <\| (x,y) \| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta : \delta = \varepsilon > 0$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon = \delta$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, fissiamo $y \in \mathbb{R}$, e studiamo:
$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$,
da cui $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = -1$; fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e studiamo:
$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$,
da cui $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = 1 \neq -1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$.
Per tanto il limite per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste.

(c) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
risulta $f(x,0) = \frac{x}{|x|}$, per cui non esiste il limite $\lim_{x\to 0} f(x,0)$; $f(0,y) = 0$, per cui il limite $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$; per tanto non esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
risulta $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$, ma la continuitá lungo gli assi é una condizione necessaria, ma non sufficiente. Utilizziamo la restrizione di f alle rette $y = mx$ con $x \neq 0$:
$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$, quindi $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}$ che dipende da m, per tanto non esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(e) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$, utilizziamo la restrizione di f alle rette $y = mx$ con $x \neq 0$:
$f(x,mx) = \frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^4x^4} = x\frac{1+m^3}{1+m^4x^2} \to 0$, per $x \to 0$, ma la continuitá lungo le rette é una condizione necessaria non sufficiente, quindi dobbiamo trovare curve lungo le quali il denominatore costa come o piú del numeratore:
$x = y^\alpha$, $\alpha \geq \frac{3}{2}$, $x = my^{\frac{3}{2}}$, $m \neq 0$, $f(my^{\frac{3}{2}}, y) = \frac{m^3y^{\frac{9}{2}}+y^3}{m^2y^3+y^4} \to m^{-2}$

per $y \to 0$. Per tanto non esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|\beta}{(x^4+y^2)^\gamma} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ utilizziamo la restrizione di f alle parabole $y = mx^2$:
$f(x, mx^2) = \frac{|x|^{\alpha+2\beta}|m|^\beta}{|x|^{4\gamma}(1+m^2)^\gamma}$ é discontinua per $\alpha + 2\beta \leq 4\gamma$, ovvero il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esiste se $\alpha + 2\beta - 4\gamma > 0$. Supponiamo che $\alpha + 2\beta - 4\gamma > 0$:
$|x|^\alpha = (x^4)^{\frac{\alpha}{4}} \leq (x^4 + y^2)^{\frac{\alpha}{4}}$, $|y|^\beta = (y^2)^{\frac{\beta}{2}} \leq (x^4 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}$, $0 \leq \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^4+y^2)^\gamma} \leq \frac{(x^4+y^2)^{\frac{\alpha+2\beta}{4}}}{(x^4+y^2)^\gamma} = (x^4 + y^2)^{\frac{\alpha+2\beta}{4}-\gamma} \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$ essendo $\alpha + 2\beta - 4\gamma > 0$.

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, é continua in $(0,0)$, infatti $|f(x,y)| \leq |\sqrt[3]{y}| \to 0$ per $y \to 0$, per tanto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

(h) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, sfruttiamo le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$, quindi risulta:
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{|\rho\sin\theta|^\alpha \cos(\rho\cos\theta)}{\rho}$
$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-1}|\sin\theta|^\alpha \cos(\rho\cos\theta) = 0 = f(0,0) \iff \alpha > 1$.

Soluzioni esercizi di ricapitolazione

1. Sia $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}\log x^n}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{x}\log x}{1+nx} = \frac{\sqrt{x}\log x}{x} = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$, per ogni $x > 0$; sia $0 < \delta \leq |x|$ risulta $\left|\frac{\log x}{\sqrt{x}} - f_n(x)\right| = \left|\log x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{n\sqrt{x}}{1+nx}\right)\right| = \left|\log x \frac{1+nx-nx}{\sqrt{x}(1+nx)}\right| = \left|\log x \frac{1}{\sqrt{x}(1+nx)}\right|$, $\sup_{x\geq\delta} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\geq\delta} = \left|\log x \frac{1}{\sqrt{x}(1+nx)}\right| \leq \sup_{x\geq\delta} \left|\frac{\log x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+n\delta}\right| \to 0$ per $n \to \infty$, quindi la convergenza é uniforme in $x > 0$, non é uniforme in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sia $x \in \mathbb{R}$ $g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $g_n'(x) = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \geq 0 \iff 1 - nx^2 \geq 0 \iff -\sqrt{\frac{1}{n}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{n}}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, per ogni

$x \in \mathbb{R}$;
$|g_n(x) - g(x)| = |\frac{x}{1+nx^2}| \le g_n(\sqrt{\frac{1}{n}}) \le \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$, per $n \to \infty$, quindi la convergenza é uniforme. Risulta $g_n'(0) = 1, \quad g_n(0) = 0$ per tanto
$1 = \lim_{n\to\infty} g_n'(0) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$.

2. (a) La serie si studia con il criterio di Leibnitz infatti é una serie a segni alterni, $|a_n|$ é monotona decrescente $\frac{e^{-\frac{x^2}{n+1}}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{n}}$ e il $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{n}} = 0$, quindi la serie é convergente in $\mathbb{R}$. Studiamo la convergenza uniforme:
$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{x^2}{k}}}{\sqrt{k}} \right| \le \frac{e^{-\frac{x^2}{n+1}}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$ per $n \to \infty$, pertanto la convergenza é uniforme. La serie dei moduli é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{n}}$ che non coverge, infatti per $n \ge 1$, $e^{-\frac{x^2}{n}} \ge e^{-x^2}$, perció la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{n}}$ é minorante dunque la serie non diverge totalmente. La serie delle derivate é $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}} x e^{-\frac{x^2}{n}}$ che converge sempre per il criterio di Leibnitz, la convergenza é uniforme infatti risulta:
$\max_{x\in\mathbb{R}} h(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} |x| e^{-\frac{x^2}{n}} = h(\sqrt{\frac{n}{2}}) = \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}}$;
$|s'(x) - s_n'(x)| \le \frac{2|x|}{\sqrt{n+1}(n+1)} e^{-\frac{x^2}{n+1}} \le \frac{\sqrt{2}}{n+1} e^{-\frac{1}{2}} \to 0$ per $n \to \infty$. Dunque vale il teorema di derivazione per serie.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2}$ ha senso per $1+nx > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 0$, risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2} = 0$; inoltre dalla disuguaglianza $\log(1+x) \le x$ abbiamo che:
$\frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2} \le \frac{nx}{n^3x+n^2} = \frac{x}{n^2x+n} \le \frac{x}{n^2x} = \frac{1}{n^2}$, per cui per confronto ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge totalmente in $[0, \infty)$.

3. $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}$, integrando termine a termine, cosa possibile perché la convergenza é uniforme:
$-\int_0^x \log(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\mathrm{d}t$;
$-\int_0^x \log(1-t)\mathrm{d}t = -[\log(1-t)t]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1-t} t\mathrm{d}t = -x\log(1-x) - \int_0^1 \frac{-t+1-1}{1-t}\mathrm{d}t = -x\log(1-x) - x + \log(1-x) = (1-x)\log(1-x) - x$,
$(1-x)\log(1-x) - x = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Per $x = -1$ la

convergenza é uniforme per Weierstrass quindi risulta:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\log 2 + 1$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^{4n}}{3^n}$, posto $x^4 = y$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)y^n}{3^n}$ risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{3^n}} = \frac{1}{3}$, $r = 3$, per $y = \pm 3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n(n^2+1)$ che non converge. Dunque la nostra serie converge per $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x+2)^n}{\sqrt{n}5^n}$, posto $e^x + 2 = y$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{n}5^n}$ risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}5^n}} = \frac{1}{5}$, $r = 5$, per $y = \pm 5$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{\sqrt{n}}$ che non converge. Dunque la nostra serie converge per $-5 < e^x + 2 < 5, \quad \Leftrightarrow \quad x < \log 3$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x - 3)^n}{n^2}$, posto $\log x - 3 = y$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, $r = 1$, per $y = \pm 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2}$ che converge. Dunque la nostra serie converge per $-1 < \log x - 3 < 1, \quad \Leftrightarrow$ $e^2 \leq x \leq e^4$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(2+\cos n)z^n$, risulta $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n(2+\cos n)} = 2$, $r = \frac{1}{2}$, per $|z| = \frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(2+\cos n)e^{i\theta n}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$ che non converge.

5. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non é continua perché $\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = 1 \neq f(0,0)$.

   (b) $f(x,y) = xe^{-\frac{x}{y}}$, risulta sulla bisettrice $y = x$, $f(x,x) = xe^{-1} \to 0$ per $x \to 0$, sulla cubica $y = -\sqrt[3]{x}$, $f(x, -\sqrt[3]{x}) = xe^{x^{-\frac{2}{3}}} \to \infty$ per $x \to 0$. Poiché ci sono due curve lungo le quali il limite di f ha due diversi valori, non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

6. $e^z = -1 - i$, $-1 - i = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$,
   $Log(-1-i) = \log\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4} + i2k\pi = z$, con $k \in \mathbb{Z}$.

7. $(-1)^{2i} = e^{2i(i\pi + i2k\pi)} = e^{-2\pi + 4\pi k}$, con $k \in \mathbb{Z}$.