Esecitazione AM2 n.1-A.A. 2006-2007- 29/10/06

Serie di Taylor e analiticitá

1. Dopo aver verificato l'applicabilitá del teorema di integrazione per serie trovare:

   (a) $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \mathrm{d}t$;

   (b) $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \quad \mathrm{d}x$;

   (c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \quad \mathrm{d}x$.

2. Sviluppare in serie:

   (a) e^x in serie di potenze $x-2$;

   (b) $\log x$ in serie di potenze $x-3$;

   (c) $\sqrt{\log \frac{1+x}{1-x}}$;

   (d) $\frac{6}{(1-x)(1+5x)}$.

3. Verificare che
$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
   pur essendo C^∞ non é analitica.

   Serie di potenze complesse:

4. Trovare il raggio di convergenza:
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n+2)z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(2+\sin n)^n z^n.$$

5. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di potenze complesse:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{3n+\log n}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n n+1}{n+\log n} z^n$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ (lavoro a casa, formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$);

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2\log_2 n} z^n$ (lavoro a casa).

Soluzioni

1. (a) La convergenza risulta uniforme per tanto

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(b) Ricordando che: data $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ uniformemente e $\varphi : X \to \mathbb{R}$, limitata, allora risulta $f_n\varphi \to f\varphi$ uniformemente, per cui $\sqrt[3]{x}\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \to \sqrt[3]{x} cos x$ uniformemente, e risulta

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \quad \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n+\frac{1}{3}} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \Big[\frac{x^{2n+\frac{4}{3}}}{2^{2n+\frac{4}{3}}}\Big]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{6}{6n+4}.$$

(c) In $[0,1]$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ é uniformemente convergente per il criterio di Abel, per tanto:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \quad \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Big[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

2. (a)

$$e^x = e^2 e^{x-2} = e^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, \text{per } x \in \mathbb{R};$$

(b)

$$\log x = \log\Big(3\frac{x-3+3}{3}\Big) = \log 3 + \log\Big(1 + \frac{x-3}{3}\Big)$$

$$= \log 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{n3^n}, \text{per} x \in (0,6].$$

(c)

$$\sqrt{\log\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}[\log(1+x) - \log(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{per } x \in (-1,1);$$

(d)

$$\frac{6}{(1-x)(1+5x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{5}{1+5x},$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1,1),$$

$$\frac{5}{1+5x} = 5\sum_{n=0}^{\infty}(-5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 5^{n+1}x^n, \ x \in \Big(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\Big),$$

$$\frac{6}{(1-x)(1+5x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 5^{n+1}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[1 + (-1)^n 5^{n+1}]x^n, \ \text{per} x \in \Big(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\Big)$$

3. La funzione é C^∞ perché é continua, infatti $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$, risulta per ogni $x \in\neq 0$ $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2x}{x^4} \to 0$ per $x \to 0$ e inoltre risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\Big(\frac{1}{x}\Big) \to 0$ per $x \to 0$. Risulta invece non analitica perché, se lo fosse, dovrebbe potersi scrivere come sviluppo in serie di potenza: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x), \ \text{in}(-\delta,\delta)$, ma tutti i termini sarebbero nulli e non potrebbe lo sviluppo, identicamente nullo, convergere ad f, dunque non é analitica.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, D(0,1), r = 1;$
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}, D(0,1), r = 1;$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0, r = \infty;$
$\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n + 2)z^n, \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{((-1)^n + 2)} = 1, r = 1;$
$\sum_{n=1}^{\infty}(2+\sin n)^n z^n, \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2+\sin n)^n} = 3$, infatti la classe limite della successione $\{\sin n\}$ é $[-1,1]$, $r = \frac{1}{3}$.

5. (a) Sia $z \in \mathbb{C}$, $c_n = \frac{(-1)^n}{3n+\log n}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+\log n}{3(n+1)+\log(n+1)} \to 1, \text{ per } \ n \to \infty,$$

$r = 1$, per tanto la serie converge per ogni $|z| < 1$, non converge per $|z| > 1$, converge totalmente in ogni compatto contenuto nel disco di convergenza $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Sul bordo del disco non si ha convergenza assoluta, perché per $|z| = 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+\log n}$ diverge essendo assimilabile alla serie $c_n \sim \frac{1}{3n}$. per la convergenza semplice sulla circonferenza di raggio 1 abbiamo che, sostituendo $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, ovvero $-z = e^{i(\pi+\theta)}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(\pi-\theta)}}{3n+\log n}$ che risulta essere convergente per $\theta \neq -\pi$, ovvero per $z \neq -1$, per il criterio di Abel-Dirichlet.
Ricordiamo:
CRITERIO DI ABEL-DIRICHLET
Sia $\{u_n\}$ $n \geq n_0$, successione in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e sia $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. Se:

i. $\{v_n\}$ é una successione reale, decrescente e infinitesima,
ii. $\{U_n\}$ é una successione limitata,

allora $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ é convergente.

Risulta infatti che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in(\pi+\theta)}$ per $\theta \neq -\pi$ ha la successione delle somme parziali limitata, poiché si ha
$\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \left| \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$ se $e^{i\theta} \neq 1$, e la successione $\frac{1}{3n+\log n}$ é infinitesima e decrescente. Dunque la serie converge semplicemente in tutta la circonferenza di raggio 1 tranne che nel punto $z = -1$ e uniformemente su tutto il cerchio di raggio 1, circonferenza compresa, escluso un intorno del punto $z = -1$.

(b) Sia $z \in \mathbb{C}$, $c_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+\log n} & \text{se } n \text{ é pari} \\ \frac{1}{n+\log n} & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$ per tanto risulta
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$, $r = 1$ la serie converge per ogni $|z| < 1$, non converge per $|z| > 1$, converge totalmente in ogni compatto contenuto nel disco di convergenza $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Sulla circonferenza di $r = 1$ la serie, sostituendo $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$, risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n n+1}{n+\log n} e^{i\theta n}$ che non converge in quanto il

termine $\frac{n+(-1)^n n+1}{n+\log n} e^{ithetan}$ non tende a zero per alcun θ (non esiste il limite!).

(c) Sia $z \in \mathbb{C}$, $c_n = \frac{n!}{n^n} \sim e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ dalla formula di Stirling, per tanto risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$, $r = e$ la serie converge per ogni $|z| < e$, non converge per $|z| > e$, converge totalmente in ogni compatto contenuto nel disco di convergenza $D(0, e) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < e\}$.
Sulla circonferenza di $r = e$ la serie, sostituendo $z = ee^{i\theta} = e^{i\theta+1}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$, risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{i\theta n+1}$ che non converge in quanto ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n} e^{i\pi\theta n}$, che non converge per alcun valore di θ (il termine generale non tende a zero).

(d) Sia $z \in \mathbb{C}$, $c_n = 2^{n-2\log_2 n}$ per tanto risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} (2^{n-2\log_2 n})^{\frac{1}{n}} = 2$, $r = \frac{1}{2}$ la serie converge per ogni $|z| < \frac{1}{2}$, non converge per $|z| > \frac{1}{2}$, converge totalmente in ogni compatto contenuto nel disco di convergenza $D(0, \frac{1}{2}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$.
Sulla circonferenza di $r = \frac{1}{2}$ la serie, sostituendo $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$, risulta $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2\log_2 n-1} e^{i\theta n}$ che converge assolutamente poiché la serie dei moduli é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge.