

AM2: Tracce delle lezioni- IX Settimana

FUNZIONI IMPLICITE E TEOREMA DEL DINI

Teorema del Dini o della funzione implicita: $n = 2$.

Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in \mathbf{R}^2 , $(x_0, y_0) \in O$. Sia

$R_{\delta, \sigma}(x_0, y_0) := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subset O$. Allora

$f_y(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta, \sigma > 0, \exists \varphi \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta), (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)) :$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (x, y) \in R_{\delta, \sigma}(x_0, y_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

$f_x(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta, \sigma > 0, \exists \varphi \in C^1((y_0 - \sigma, y_0 + \sigma), (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) :$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (x, y) \in R_{\delta, \sigma}(x_0, y_0) \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(y)$$

Inoltre,

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}, \quad (\varphi'(y) = -\frac{f_y(\varphi(y), y)}{f_x(\varphi(y), y)})$$

Prova. Supporremo (sostituendo eventualmente f con $f(x+x_0, y+y_0) - f(x_0, y_0)$ e f con $-f$) che $x_0 = y_0 = 0$, $f(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) > 0$. Sia $R_{\delta, \sigma} := R_{\delta, \sigma}(0, 0)$. Allora esistono $\delta', \sigma > 0$ tali che

$$f_y \geq r := \frac{1}{2}f_y(0, 0) > 0 \text{ in } R_{\delta', \sigma} \text{ e quindi } f(0, -\sigma) < 0 < f(0, \sigma)$$

e quindi $\exists \delta \leq \delta' : |x| \leq \delta \Rightarrow f(x, -\sigma) < 0 < f(x, \sigma)$ e quindi

$$|x| \leq \delta \Rightarrow \exists! y = \varphi(x) \in [-\sigma, \sigma] \text{ tale che } f(x, \varphi(x)) = 0$$

Verifichiamo ora che φ é continua, e, di piú, che $\varphi \in C^1(-\delta, \delta)$:

$$0 \equiv f(x+s, \varphi(x+s)) - f(x, \varphi(x)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(x+ts, t\varphi(x+s) + (1-t)\varphi(x))] dt$$

$$\Rightarrow [\varphi(x+s) - \varphi(x)] \int_0^1 f_y(x+ts, t\varphi(x+s) + (1-t)\varphi(x)) dt =$$

$$- \int_0^1 f_x(x+ts, t\varphi(x+s) + (1-t)\varphi(x)) s dt \Rightarrow |\varphi(x+s) - \varphi(x)| \leq \frac{O(s)}{r}$$

e quindi, dividendo per s e passando al limite sotto segno di integrale,

$$\left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+s) - \varphi(x)}{s} \right] f_y(x, \varphi(x)) = -f_x(x, \varphi(x))$$

NOMENCLATURA. La funzione φ , che si trova (avendo fissato x e considerando y come incognita, o viceversa) risolvendo l'equazione $f(x, y) = 0$, si chiama **funzione implicitamente definita** dall'equazione $f(x, y) = 0$.

Da $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ segue anche che $f \in C^\infty(O) \Rightarrow \varphi \in C^\infty$.

$u_0 \in O$ é **punto regolare** se $\nabla f(u_0) \neq 0$

$u_0 \in O$ é **punto singolare, critico, stazionario** se $\nabla f(u_0) = 0$

$\Gamma_c := \{(x, y) : f(x, y) = c\} = f^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{R}$ é **insieme di livello** di f . Se $\nabla f(u) \neq 0, \forall u \in \Gamma_c$, c si chiama **valore (o livello) regolare** di f : un livello é regolare se non contiene punti singolari (altrimenti é singolare, critico, stazionario).

Dal Teorema del Dini:

-l'insieme di livello $\Gamma_c = \{f = c\}$ é, attorno a un punto regolare u_0 , il grafico di una funzione regolare φ (nella variabile x od y) e la retta tangente alla curva di livello Γ_c in u_0 ha equazione $\langle \nabla f(u_0), u - u_0 \rangle = 0$,

-in particolare, $\nabla f(u_0)$ é ortogonale (in u_0) alla curva di livello $\{f(u) = f(u_0)\}$

-se c é valore regolare, Γ_c é **curva (cartesiana) regolare**, ovvero é, attorno ad ogni suo punto, un grafico cartesiano

Teorema del Dini o della funzione implicita: $n \geq 2$.

Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in \mathbf{R}^{n+1} , $\bar{u} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}) \in O$, $f(\bar{u}) = 0$.

Sia $R_{\delta, \sigma}(\bar{u}) := D_\delta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \times [\bar{y} - \sigma, \bar{y} + \sigma] \subset O$. Se $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{u}) \neq 0$

allora l'insieme degli zeri di f , in un $R_{\delta, \sigma}(\bar{u})$ opportuno, é grafico cartesiano, ovvero

$$\exists \delta, \sigma > 0, \exists \varphi \in C^1(D_\delta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), [\bar{y} - \sigma, \bar{y} + \sigma]) : \\ f(x_1, \dots, x_n, y) = 0, (x_1, \dots, x_n, y) \in R_{\delta, \sigma}(\bar{u}) \Leftrightarrow y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Inoltre, φ é di classe C^1 . In particolare,

$$f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0 \Rightarrow \varphi_{x_j} = -\frac{f_{x_j}}{f_y} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

PRINCIPIO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano $f, g \in C^1(O)$, O aperto in \mathbf{R}^2 . Sia $\Gamma = \{g = 0\}$.

Sia $u_0 \in \Gamma$ tale che $f(u_0) \leq f(u) \quad \forall u \in \Gamma$. Se $\nabla g(u_0) \neq 0$ allora

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} : \quad \nabla f(u_0) = \lambda \nabla g(u_0)$$

Infatti, intorno ad $u_0 = (x_0, y_0)$, il **vincolo** Γ si scrive, in base al Teorema del Dini ed all'ipotesi su Γ , come, diciamo, $(x, \varphi(x))$ ove φ é una funzione C^1 intorno ad x_0 . Ma allora $x \rightarrow f(x, \varphi(x))$ ha un minimo (libero !) in x_0 e quindi

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x))|_{x=x_0} = f_x(u_0) + f_y(u_0)\varphi'(x_0) = f_x(u_0) - f_y(u_0) \frac{g_x(u_0)}{g_y(u_0)}$$

Posto $\lambda := \frac{f_y(u_0)}{g_y(u_0)}$ si ha quindi $f_x(u_0) = \lambda g_x(u_0)$ e cioè $\nabla f(u_0) = \lambda \nabla g(u_0)$.

Funzioni Implicite e Moltiplicatori di Lagrange: esempi

1. Sia $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$, $\Gamma = g^{-1}(0)$, $d(x, y) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2$

Determinare $m := \inf_{\Gamma} d$, $M := \sup_{\Gamma} d$.

Siccome Γ é compatto e d é continua, m, M sono finiti, e sono infatti il minimo/massimo valore di d su Γ . Tali valori dovranno essere presi o nel punto singolare di Γ , cioè $(0, 0)$, oppure in (x, y) , soluzione del sistema di Lagrange $\nabla d = \lambda \nabla g$, $g = 0$. Siccome $\nabla d = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 0$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ non appartiene a Γ , dovrà essere $\lambda \neq 0$ e il sistema si riscrive

$$x(x^2 + y^2) - x = \lambda(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad y(x^2 + y^2) + y = \lambda y, \quad (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Dalla seconda equazione: $y = 0$ oppure $x^2 + y^2 + 1 = \lambda$ (e in tal caso $\lambda > 1$).

Se $y = 0$, da $0 = g(x, 0)$ segue $x = \pm\sqrt{2}$.

Se $y \neq 0$, ponendo $x^2 + y^2 = \lambda - 1$ nella prima equazione, otteniamo $\lambda = 2\sqrt{2}x$, mentre, da $g = 0$ otteniamo $\lambda^2 + 1 = 4x^2 + 2$ e quindi $x = \pm\frac{1}{2}$ e siccome deve essere $\lambda > 1$, troviamo le soluzioni $x = \frac{1}{2}$ $y = \pm(\sqrt{2} - \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}$.

Ora, d raggiunge il suo minimo/massimo su Γ o in un punto singolare di Γ o in una soluzione del sistema di Lagrange, ovvero in uno dei punti

$$(0, 0), \quad (\pm\sqrt{2}, 0), \quad (\frac{1}{2}, \pm(\sqrt{2} - \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}) \quad \text{Siccome } d(0, 0) = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$d\left(\frac{1}{2}, \pm(\sqrt{2} - \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), \quad d(\sqrt{2}, 0) = \frac{1}{2}, \quad d(-\sqrt{2}, 0) = \frac{9}{2}$$

concludiamo che $m = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ed é realizzato in $(\frac{1}{2}, \pm(\sqrt{2}-\frac{5}{4})^{\frac{1}{2}})$, mentre $M = \frac{9}{2}$ é realizzato in $(-\sqrt{2}, 0)$.

2 Sia $g(x, y) = 4y^2 - x^4(1 + 4y) + 2x^6$, $f(x, y) = y + x^2$ $\Gamma = g^{-1}(0)$.

Calcolare $m := \inf_{\Gamma} f$

Siccome $4y^2 + 2x^6 = x^4(1 + 4y) \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4}$, é $y + x^2 \geq x^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \quad \forall (x, y) \in \Gamma$ e quindi m é finito ed é infatti un minimo.

Notiamo che i punti critici di g , soluzioni di

$$g_x := 12x^5 - 4x^3(1 + 4y) = 0, \quad g_y := 8y - 4x^4 = 0$$

sono $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8})$ e che, tra questi, i primi tre sono punti singolari di Γ e si ha

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, \frac{1}{2}) = f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

Cerchiamo il punto di minimo tra le soluzioni di $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$. Vedremo tuttavia che tale sistema non ha soluzione. Intanto, siccome

$$\nabla f(x, y) = (2x, 1)$$

non si annulla mai deve essere $\lambda \neq 0$, $\nabla g \neq 0$.

Ora, $(0, y)$ é soluzione di $f_x = \lambda g_x$, ma $g(0, y) = 0 \Rightarrow y = 0$, e $(0, 0)$ non é soluzione di $\nabla f = \lambda \nabla g$ perché $\nabla g(0, 0) = 0$.

Sia quindi $x \neq 0$ e quindi $6x^4 - 2x^2(1 + 4y) = \lambda = 8y - 4x^4$ e quindi $y = \frac{5x^4 - x^2}{4(1 + x^2)}$ che, con $g = 0$, dá $12x^6 - 21x^4 + 6x^2 + 3 = 0$. Posto $x^2 = t$ si vede facilmente che l'equazione $12t^3 - 21t^2 + 6t + 3 = 0$ ha un unico zero, positivo, in $t = 1$, da cui $|x| = 1$ e quindi $y = \frac{1}{2}$. Siccome $\nabla g(1, \frac{1}{2}) = \nabla g(-1, \frac{1}{2}) = 0$, concludiamo che **il sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$ non ha soluzioni.**

Il punto di minimo deve quindi essere un punto singolare di Γ . Confrontando i valori di f in tali punti, concludiamo che $m = f(0, 0) = 0$.

Notiamo che a tale risultato si puó pervenire piú facilmente, riconoscendo che $4y^2 - x^4(1 + 4y) + 2x^6 = 4(y - \frac{x^2}{2})(y + \frac{x^2}{2} - x^4)$ e quindi

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 := \{y = \frac{x^2}{2}\}, \quad \Gamma_2 := \{y = -\frac{x^2}{2} + x^4\}$$

e $f(x, \frac{x^2}{2}) = \frac{3}{2}x^2$, $f(x, -\frac{x^2}{2} + x^4) = \frac{x^2}{2} + x^4$ funzioni che hanno appunto un minimo in $x = 0$.

3 Sia $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

$$\begin{aligned} \acute{E} \quad & f_x = 4x(x^2 + y^2) - 4x, & f_y &= 4y(x^2 + y^2) + 4y \\ f_{xx} &= 4(x^2 + y^2) + 8x^2 - 4, & f_{xy} &= 8xy, & f_{yy} &= 4(x^2 + y^2) + 8y^2 + 4 \end{aligned}$$

Punti stazionari: $(0, 0), (\pm 1, 0)$; $\det H(\pm 1, 0) > 0, \det H(0, 0) < 0$;
 $(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(u) \rightarrow +\infty$; $(0, 0)$ é una sella.

Valori critici: $-1 = f(\pm 1, 0)$ (minimo assoluto) $0 = f(0, 0)$.

Curve di livello: $\Gamma_c := \{f = c\}$.

Se $c < -1, \Gamma_c = \emptyset$; se $c = -1, \Gamma_c = \{(-1, 0), (1, 0)\}$.

Se $-1 < c, c \neq 0$ Γ_c é una curva regolare, inoltre Γ_c é un insieme simmetrico rispetto agli assi e all'origine (segue dall'invarianza di f rispetto alle riflessioni $(x, y) \rightarrow (-x, y), (x, y) \rightarrow (x - y), (x, y) \rightarrow (-x, -y)$).

Per tali valori di $c, \Gamma_c \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ é grafico della funzione (implicitamente definita dall'equazione $f = c$)

$$y(x) = \left[\sqrt{4x^2 + 1 + c} - (x^2 + 1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$1 - \sqrt{1 + c} < x < 1 + \sqrt{1 + c}$ se $c \leq 0, 0 \leq x < 1 + \sqrt{1 + c}$ se $c \geq 0$.

In particolare, se $c < 0, \Gamma_c$ é una coppia di 'circoli' attorno a $(-1, 0), (1, 0)$ rispettivamente, mentre per $c > 0, \Gamma_c$ é immagine della circonferenza unitaria $h^2 + k^2 = 1$, attraverso la 'parametrizzazione'

$$x = r(h, k)h, \quad y = r(h, k)k, \quad h^2 + k^2 = 1, \quad r^2(h, k) = h^2 - k^2 + \sqrt{(h^2 - k^2)^2 + c}$$

ottenuta chiedendo che $(r^2h^2 + r^2k^2)^2 - 2r^2(h^2 + k^2) = c$ e risolvendo questa equazione, per h, k fissati, nell'incognita $r > 0$.

Notiamo anche qui il drastico cambio nella natura dei sottolivelli $\{f \leq c\}$ quando c attraversa il valore critico $c = 0$: da due 'dischi' disgiunti (insieme disconnesso) ad un solo 'disco'.

La curva $\Gamma_0: (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ (**Lemniscata di Bernoulli**)

É una curva regolare in ogni suo punto diverso da $(0, 0)$, simmetrica rispetto agli assi e all'origine e compatta, e infatti

$$\Gamma_0 \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} \subset \left\{ \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

(disco di centro $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$) giacché $(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 > \sqrt{2}x \Rightarrow f(x, y) > 2y^2 \geq 0$.

$\Gamma_0 \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ é il grafico di $y(x) = \sqrt{\sqrt{4x^2 + 1} - (x^2 + 1)}$, $0 \leq x \leq 2$ che ha derivata $y' = -\frac{f_x}{f_y}(x, y(x))$. Si vede facilmente che y' si annulla in $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ punto in cui $y(x)$ raggiunge il suo massimo.

Notiamo infine che $y(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$ e quindi $y'(x) = -\frac{x^2 + y^2(x) - 1}{x^2 + y^2(x) + 1} \rightarrow_{x \rightarrow 0} 1$. Dunque, Γ_0 ha in $(0, 0)$, due rette tangenti, di equazione complessiva $x^2 - y^2 = 0$.

4 Siano $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $\Gamma = \{(x, y) : g(x, y) = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$. Sia $f(x, y) := (x - 1)^2 + (y - 1)^2$.

Calcolare $m := \inf_{\Gamma} f$, $M := \sup_{\Gamma} f$.

Siccome $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, si ha che

$y > 3 - x \Rightarrow g(x, y) \geq (x + y)\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) = \frac{x^2 + y^2}{2}(x + y - 3) > 0$ e quindi

$\Gamma \subset \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$ e quindi $M < +\infty$. Notiamo che $\nabla g = 0 \Leftrightarrow x^2 = y, y^2 = x$ e quindi $(0, 0)$ é l'unico punto singolare di Γ .

Siccome $(1, 1)$ é l'unico punto critico di f e $(1, 1)$ non appartiene a Γ , il sistema di Lagrange associato al problema si può scrivere

$$\nabla g(x, y) = \lambda \nabla f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad \text{ovvero}$$

$$3x^2 - 3y = 2\lambda(x - 1), \quad 3y^2 - 3x = 2\lambda(y - 1) \quad x^3 + y^3 = 3xy, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

che comporta $\frac{x^2 - y}{x - 1} = \frac{y^2 - x}{y - 1}$ (perché $(1, 1)$ non é soluzione).

Da tali equazioni deduciamo $xy(x - y) = x - y$.

Se $x = y$, da $g = 0$ otteniamo $x = y = \frac{3}{2}$.

Se $x \neq y$ allora $xy = 1$ e quindi $x^3 + \frac{1}{x^3} = 3$ che dá le soluzioni

$$\left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right), \quad \left(\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

In tali punti f prende il valore $c = [1 - (\frac{3 - \sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}]^2 + [1 - (\frac{3 + \sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}]^2$.

Siccome $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$, concludiamo che

$$m = \min\left\{\frac{1}{2}, c\right\}, \quad M = 2 = f(0, 0)$$

APPENDICE A1: Il Principio dei Moltiplicatori di Lagrange in \mathbf{R}^n

Siano $f, g \in C^1(O)$, O aperto in \mathbf{R}^n . Sia $u \in O$ tale che

$$\exists r > 0 : \|v - u\| \leq r, \quad g(v) = g(u) \quad \Rightarrow \quad f(v) \geq f(u)$$

Allora, $\nabla g(u) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda : \nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$

Possiamo (ovvie sostituzioni) supporre che $u = 0$, $g(0) = f(0) = 0$, $\|\nabla g(0)\| = 1$.

Cominciamo col provare che $\exists \delta > 0, \epsilon > 0 : \langle k, \nabla g(0) \rangle = 0, \|k\| < \delta \quad \Rightarrow$

$$\exists t = t(k) \in [-\epsilon, \epsilon] \text{ tale che } g(t\nabla g(0) + k) = 0 \text{ e } t(k) = o(\|k\|)$$

Intanto, da $\|\nabla g(0)\| = 1$ e dalla continuit  di $\nabla g(v)$, segue che $\exists \delta > 0 : \langle \nabla g(v), \nabla g(0) \rangle \geq \frac{1}{2}$ se $\|v\| \leq \delta$ e quindi

$$\frac{d}{dt} g(t\nabla g(0) + k) = \langle \nabla g(t\nabla g(0) + k), \nabla g(0) \rangle \geq \frac{1}{2} \text{ se } t^2 + \|k\|^2 \leq \delta^2$$

e quindi $t \rightarrow g(t\nabla g(0) + k)$   strettamente crescente in $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}\delta, \frac{\sqrt{2}}{2}\delta]$ se $\|k\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$. In particolare $\exists \epsilon > 0 : g(-\epsilon\nabla g(0)) < 0 < g(\epsilon\nabla g(0))$ e quindi, per continuit , prendendo eventualmente un δ pi  piccolo,

$$g(-\epsilon\nabla g(0) + k) < 0 < g(\epsilon\nabla g(0) + k) \text{ se } \|k\| \leq \delta$$

che, insieme alla stretta monotonia, comporta che $t \rightarrow g(t\nabla g(0) + k)$ ha, se $\|k\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$ esattamente uno zero in $[\epsilon, \epsilon]$, che chiameremo $t(k)$. Poi, $\langle \nabla g(0), k \rangle = 0, \|k\| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 = g(t(k)\nabla g(0) + k) = \langle \nabla g(0), t(k)\nabla g(0) + k \rangle + o(\|t(k) + \|k\|\|) = t(k) + o(\|t(k) + \|k\|\|)$ cio , fissato $\rho > 0$, $\exists \sigma_\rho : \|k\| < \sigma_\rho \quad \Rightarrow \quad |t(k)| \leq \rho(\|t(k) + \|k\|\|) \quad \Rightarrow \quad |t(k)| \leq 2\rho\|k\|$.

Infine, dall'ipotesi su f segue che, $\langle \nabla g(0), k \rangle = 0, \|k\| = 1, 0 < \tau \leq \frac{\delta}{2} \quad \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{f(t(\tau k)\nabla g(0) + \tau k) - f(0)}{\tau} = \langle \nabla f(0), \frac{t(\tau k)}{\tau} \nabla g(0) + k \rangle + o(1) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \langle \nabla f(0), k \rangle$$

e quindi $\langle \nabla g(0), k \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \langle \nabla f(0), \pm k \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla f(0), k \rangle = 0 \quad \Rightarrow$

$$\nabla f(0) = \langle \nabla f(0), \nabla g(0) \rangle \nabla g(0)$$

Infatti, se $\|h\| = 1$ e u   un vettore tale che $\langle h, k \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u, k \rangle = 0$, allora $\langle h, u - \langle u, h \rangle h \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u, u - \langle u, h \rangle h \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u - \langle u, h \rangle h, u - \langle u, h \rangle h \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u - \langle u, h \rangle h = 0$.

APPENDICE A2: Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \dots, x_n)$ di f dipende dalle proprietà di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$\langle H_f(u) h, h \rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u) h_i h_j = \quad h = (h_1, \dots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Le proprietà di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \mathcal{A}^t$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$\langle \mathcal{A} h, h \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n \quad \text{si dice}$$

definita positiva (negativa) se $\langle \mathcal{A} h, h \rangle > 0 (< 0)$, $\forall h \neq (0, 0)$

semidefinita positiva (negativa) se $\langle \mathcal{A} h, h \rangle \geq 0 (\leq 0)$, $\forall h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} \langle \mathcal{A} h, h \rangle \quad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} \langle \mathcal{A} h, h \rangle$$

Prova. Sia $m := \langle \mathcal{A} \bar{h}, \bar{h} \rangle = \min_{\|h\|=1} \langle \mathcal{A} h, h \rangle$. Siccome

$$\nabla \langle \mathcal{A} h, h \rangle = 2 \mathcal{A} h \quad \text{e} \quad \nabla \|h\|^2 = 2h$$

per il Principio dei moltiplicatori di Lagrange esiste λ tale che $\mathcal{A} \bar{h} = \lambda \bar{h}$ con, $m = \langle \mathcal{A} \bar{h}, \bar{h} \rangle = \lambda \|\bar{h}\|^2 = \lambda$.

Dunque $\mathcal{A} \underline{h} = m \underline{h}$, cioè m è un autovalore di \mathcal{A} , necessariamente il più piccolo, giacché $\mathcal{A} h = \lambda h$, $\|h\| = 1 \Rightarrow \lambda = \langle \mathcal{A} h, h \rangle \geq m$.

Corollario

(ii) \mathcal{A} è definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ ($\lambda_n < 0$)

(iii) \mathcal{A} è semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ ($\lambda_n = 0$)