

AM2: Tracce delle lezioni- VII Settimana

TEOREMA DEL VALORE INTERMEDIO

Cammini continui

Sia $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $x_i \in C([0, 1]) \quad \forall i = 1, \dots, n$. Scriveremo $\gamma \in C([0, 1], \mathbf{R}^n)$ e diremo che γ é cammino continuo da $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$.

CONNESSIONE

$C \subset \mathbf{R}^n$ é **connesso per archi** se $\forall u, v \in C$, esiste un **cammino continuo** γ tutto contenuto in C e congiungente u con v :

$$\gamma(t) \in C \quad \forall t \in [0, 1], \quad \gamma(0) = u, \quad \gamma(1) = v$$

ESEMPIO. Gli insiemi convessi sono connessi per archi: se $u, v \in C$ convesso, basta prendere come cammino da u a v il segmento congiungente u e v : $\gamma(t) = tv + (1 - t)u$, $t \in [0, 1]$.

ESEMPIO di un insieme non connesso per archi: $O_1 \cup O_2$, O_i aperti disgiunti. Infatti, se $u \in O_1, v \in O_2$, allora ogni cammino continuo γ congiungente $u = \gamma(0)$ e $v = \gamma(1)$ interseca ∂O_i giacché, per la continuità di γ ,

$$\bar{t} := \sup\{t \in [0, 1] : \gamma(s) \in O_1 \quad \forall s \in [0, t]\} \in (0, 1)$$

e, sempre per la continuità di γ , $\gamma(\bar{t}) \in \partial O_1$.

NOTA. Se $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é cammino continuo in C e f é continua in C , allora $f(\gamma(t))$ é continua in $[0, 1]$. Infatti, $t_k \in [0, 1], t_k \rightarrow_k t \Rightarrow x_i(t_k) \rightarrow x_i(t) \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \gamma(t_k) = (x_1(t_k), \dots, x_n(t_k)) \rightarrow_k (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \gamma(t)$.

Teorema del valore intermedio. Sia $C \subset \mathbf{R}^n$ connesso per archi.

Allora f continua in $C \Rightarrow f(C)$ é un intervallo.

Prova. Sia $a = f(u)$, $b = f(v)$, $u, v \in C$. Siano $x_i \in C([0, 1])$ tali che $\gamma(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in C \quad \forall t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Siccome $t \rightarrow f(\gamma(t))$ é continua in $[0, 1]$ e $f(\gamma(0)) = a, f(\gamma(1)) = b$, si ha $[a, b] \subset f(\gamma([0, 1]))$ (teorema del valore intermedio per funzioni di una variabile!).

DERIVATE PARZIALI E DIFFERENZIABILITÀ

In quanto segue, $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $D_r(u) \subset A$, $u = (x_1, \dots, x_n)$.

DERIVATE PARZIALI Se $t \rightarrow f(t, x_2, \dots, x_n)$ é derivabile in $t = x_1$, diremo che f é (parzialmente) derivabile rispetto alla prima variabile x_1 in u e scriveremo

$$f_{x_1}(u) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \delta, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\delta}$$

ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{d}{dt} f(t, x_2, \dots, x_n)|_{t=x_1}$. Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(u + \delta e_j) - f(u)}{\delta}$$

(e_j ha coordinate tutte nulle eccetto la j -esima, che vale 1) se tale limite esiste finito.

Sia O aperto: $f \in C^1(O)$ se $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$ esistono e sono continue in O .

DERIVATE DIREZIONALI Sia $h \in \mathbf{R}^n$. Se $t \rightarrow f(u + th)$ é derivabile a destra in $t = 0$, diremo che f é derivabile nella direzione h in u e scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial h}(u) := \frac{d}{dt} f(u + th)|_{t=0^+} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u + th) - f(u_0)}{t}$$

DIFFERENZIABILITÀ, DIFFERENZIALE, GRADIENTE

Se esiste un vettore $a \in \mathbf{R}^n$ tale che

$$f(u + h) - [f(u) + \langle a, h \rangle] = o(\|h\|) \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0$$

f si dice differenziabile in u , a si chiama gradiente di f in u e si denota $\nabla f(u)$:

$$\frac{f(u + h) - [f(u) + \langle \nabla f(u), h \rangle]}{\|h\|} \rightarrow_{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

Il funzionale lineare in \mathbf{R}^n dato da $h \rightarrow \langle \nabla f(u), h \rangle$ si chiama differenziale di f in u e si indica $df(u)$. Dunque

$$df(u)(h) = \langle \nabla f(u), h \rangle \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$$

$$f(u + h) = f(u) + df(u)(h) + o(\|h\|) \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0$$

ESEMPIO $f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1}y + \dots + a_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n$,
 $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $f(x, y) = \sin xy$ sono di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$

ESEMPI 1 - (i) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$ ed ha anche derivate parziali in $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Tuttavia f non ha derivata in $(0, 0)$ nella direzione h , a meno che non sia $h = (x, 0)$ oppure $h = (0, y)$ per qualche x, y , perché $f(tx, ty) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Ricordiamo che f non é continua in zero. Dunque,

una funzione puó avere, in un punto, derivate parziali senza essere continua in quel punto.

A futura memoria: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y} \forall y \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

(ii) $f(x, y) = \frac{x^6 y^2}{x^{10} + y^6}$, $f(0, 0) = 0$. É $\frac{f(tx, ty)}{t} = \frac{t^2 x^6 y^2}{t^4 x^6 + y^6} \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = 0 \forall h \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x, x^2) \equiv \frac{1}{1+x^2}$, vediamo che

una funzione puó essere, in un punto, derivabile lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iii) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$ ed ha derivate parziali anche in $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Inoltre, in $(0, 0)$, f é derivabile in tutte le direzioni: $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = \lim_t \frac{f(th)}{t} = f(h)$.

Inoltre, f é continua anche in zero: $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \leq \frac{x}{2} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{x}{2}$.

Tuttavia f non é differenziabile in $(0, 0)$, perché, se lo fosse, sarebbe necessariamente $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ (vedi, ad esempio, la Proposizione 1) e quindi dovrebbe essere $\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = o(1)$, mentre $\frac{f(x, x)}{\sqrt{x^2 + x^2}} \equiv \frac{x}{|x|} 2^{-\frac{3}{2}}$. Dunque

una funzione puó essere, in un punto, continua e derivabile lungo tutte le direzioni senza essere differenziabile in quel punto.

Notiamo che: $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, t)| = \frac{1}{2}$ per $t \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

Proposizione 1 Sia f differenziabile in u . Allora f é continua in u e

$$\forall h \in \mathbf{R}^2, \exists \frac{\partial f}{\partial h}(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial h}(u) = \langle \nabla f(u), h \rangle$$

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$ esistono per ogni j e $\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right)$.

Infatti $|f(u+h) - f(u)| \leq | \langle \nabla f(u), h \rangle + o(\|h\|) | \leq (\|\nabla f(u)\| + o(1))\|h\|$,

e quindi f é continua in u . Poi, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : \|h\| = 1, |t| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(u+th) - f(u)}{t} - \langle \nabla f(u), h \rangle \right| = \left| \frac{f(u+th) - f(u) - \langle \nabla f(u), th \rangle}{t} \right| = \frac{o(\|th\|)}{|t|} \leq \epsilon.$$

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u+te_j) - f(u)}{t} = \langle \nabla f(u), e_j \rangle$.

Proposizione 2 $f \in C^1(D_r(u)) \Rightarrow f$ é differenziabile in u .

Prova. Per semplicitá: $n = 2$. Scriviamo $u = (x, y)$. Da f_x, f_y continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \left| \frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v) \right| \leq \epsilon \quad \forall w, v \in D_\delta(u)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau} f(\tau, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau} f(x, \tau) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau)$ otteniamo, per $s^2 + t^2 \leq \delta_\epsilon^2$,

$$\begin{aligned} & \left| f(x+s, y+t) - f(x, y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)t \right] \right| = \\ & \left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)s + f(x, y+t) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)t \right| \leq \\ & \left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] d\tau \right| \leq \epsilon(|s| + |t|) \end{aligned}$$

ESEMPIO 2. Le funzioni in Esempi 1 sono differenziabili per la Prop. 2 in ogni $u \neq 0$ mentre in $(0, 0)$, pur avendo derivate parziali e derivate in tutte le direzioni, non sono differenziabili o perché discontinue (casi (i)-(ii)) oppure (caso (iii)) perché $\frac{\partial f}{\partial h}(0) = f(h)$ non é una funzione lineare in h .

Notiamo che in tutti questi esempi le derivate parziali non sono (ovviamente) continue in $(0, 0)$.

Significato geometrico del differenziale

(ovvero della forma lineare $h \rightarrow \langle \nabla f(0,0), h \rangle$, $h \in \mathbf{R}^n$)

Per semplicitá, sia $n = 2$. Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Il suo grafico é la 'superficie' in \mathbf{R}^3

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \text{dominio di } f\}$$

Piano tangente . Per semplicitá supponiamo $f(0,0) = 0$. Il piano in \mathbf{R}^3

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) y \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

che ha la proprietá di approssimare bene il grafico di f in punti vicini a $(0,0)$:

$$f(h) - \langle \nabla f(0,0), h \rangle = o(\|h\|), \quad h = (x, y) \rightarrow 0$$

si chiama **piano tangente al grafico di f** in $(0,0, f(0,0))$. É formato dai vettori

$$(h, \langle \nabla f(0,0), h \rangle) = \left(\frac{d}{dt}(th), \frac{d}{dt}f(th) \right) \quad h \in \mathbf{R}^2$$

(**vettori tangenti al grafico di f** in $(0,0)$) ovvero dai vettori tangenti in $(0,0)$ alle curve $t \rightarrow (th, f(th))$ ($h \in \mathbf{R}^2$).

Infine,

$$z = f(u) + \langle \nabla f(u), h - u \rangle, \quad h \in \mathbf{R}^2$$

é il **piano tangente al grafico di f** nel punto $(u, f(u))$.

Significato geometrico del gradiente.

$$\frac{d}{dt}f(u + th) = \frac{\partial f}{\partial h}(u) = \langle \nabla f(u), h \rangle$$

é la pendenza della curva ottenuta intersecando il piano $\{(u + th, z) : t, z \in \mathbf{R}\}$ con il grafico di f . Da

$$\sup_{\|h\|=1} |\langle \nabla f(u), h \rangle| = \|\nabla f(u)\|$$

segue: $\nabla f(u)$ é la direzione di massima pendenza del grafico di f in u
e $\|\nabla f(u)\|$ é la massima pendenza di f in u .

ESERCIZIO 1. Se $g \in C([a, b])$, $f(x, y) := \int_x^y g(t)dt$, $x, y \in [a, b] \times [a, b]$, é $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$, $x, y \in (a, b)$ e quindi $f \in C^1((a, b) \times (a, b))$.

ESERCIZIO 2. $f(x, y) = \frac{x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ é continua in $(0, 0)$ perché $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial h}(0) = \lim_t \frac{f(th)}{t} = 0 \forall h \in \mathbf{R}^2$. Ma f non é differenziabile in $(0, 0)$: $y = x^2 \Rightarrow \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 3. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0, 0) = 0. \quad \text{É}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [(\alpha - 2)x^2 + \alpha y^2]}{x(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [\beta x^2 + (\beta - 2)y^2]}{y(x^2 + y^2)^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Abbiamo visto che f é continua in $(0, 0) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 2$.
Provare ora che

- (i) esiste $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) \quad \forall h \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$
- (ii) f é differenziabile in $(0, 0) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$
- (iii) $f \in C^1 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$ e $\alpha, \beta \geq 1$.

(i) $\alpha + \beta < 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} = t^{\alpha + \beta - 3} f(x, y) \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} +\infty$ (se $x^2 + y^2 \neq 0$)
e $\alpha + \beta = 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} f(x, y)$ e quindi, se $\alpha + \beta \leq 3$, f non é derivabile, in $(0, 0)$, nelle direzioni $h = (x, y) \neq (0, 0)$. Invece, $\alpha + \beta > 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = 0 \forall h \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Da (ii) segue che f non é differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.

Sia $\alpha + \beta > 3$.

Siccome $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

$$f \text{ é differenziabile in } (0, 0) \Leftrightarrow \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$$

Siccome

$$\alpha \geq 3, \quad \alpha + \beta > 3 \Rightarrow \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha - 3}{2}} |y|^\beta \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$$

basta considerare il caso $\alpha, \beta \in (0, 3)$. Posto $\tau := \frac{\alpha + \beta - 3}{2}$ é allora $\tau \in (0, \frac{1}{2} \min\{\alpha, \beta\})$, $\alpha + \beta - 2\tau = 3$ e

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[\frac{|x|^{\frac{2}{3}(\alpha - \tau)} |y|^{\frac{2}{3}(\beta - \tau)}}{x^2 + y^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad |x|^\tau |y|^\tau \leq |x|^\tau |y|^\tau \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$$

di nuovo in virtú di (*).

(iii) Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Sia $\alpha + \beta > 3$.

$$\text{Come in (i)} \quad \alpha \geq 1, \quad \alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \alpha \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^2 + y^2} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$$

mentre, se $\alpha \in (0, 1)$ e $\gamma \gg 1$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)} [(\alpha-2)t^{2\gamma-2} + \alpha]}{(t^{2\gamma+2} + 1)^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Analogamente, $f_y \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$ sse $\alpha + \beta > 3$ e $\beta \geq 1$.

ESRCIZIO 4. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$g(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^4 + y^2} \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad g(0, 0) = 0. \quad \text{É}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2]}{x(x^4 + y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [\beta x^4 + (\beta-2)y^2]}{y(x^4 + y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Provare che

- (i) g é continua in $(0, 0)$ $\Leftrightarrow \alpha + 2\beta > 4$
- (ii) esiste $\frac{\partial g}{\partial h}(0, 0) \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$
- (iii) g é differenziabile in $(0, 0)$ $\Leftrightarrow \alpha + 2\beta > 5$ e $\alpha + \beta > 3$
- (iv) $g \in C^1$ $\Leftrightarrow \alpha + 2\beta > 6$ e $\alpha, \beta \geq 1$.

(i) Se $\alpha + 2\beta < 4$, $g(tx, t^2y) = t^{\alpha+2\beta-4}g(x, y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2 + y^2 \neq 0$) e quindi g non é continua in $(0, 0)$.

Sia dunque $\alpha + 2\beta > 4$.

Se $f(x, y) := \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}} |y|^\beta}{x^2 + y^2}$ é $g(x, y) = f(x^2, y) \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$ perché $\frac{\alpha}{2} + \beta > 2$ (vedi l'esercizio 1) e quindi g é continua.

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \alpha + \beta < 3 &\Rightarrow \frac{g(tx, ty)}{t} = t^{\alpha + \beta - 3} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{t^2 x^4 + y^2} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} +\infty \quad \text{e} \\
\alpha + \beta = 3 &\Rightarrow \frac{g(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{y^2} \quad (\text{se } x^2 + y^2 \neq 0) \quad \text{e quindi,} \\
\alpha + \beta \leq 3 &\Rightarrow f \text{ non é derivabile, in } (0, 0), \text{ nelle direzioni } h = (x, y) \neq (0, 0). \\
\alpha + \beta > 3 &\Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2.
\end{aligned}$$

(iii) Siccome $g_x(0, 0) = g_y(0, 0) = 0$

$$g \text{ é differenziabile in } (0, 0) \Leftrightarrow \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0$$

Siccome $\alpha + 2\beta \leq 5 \Rightarrow \frac{g(t, t^2)}{\sqrt{t^2 + t^4}} = t^{\alpha + 2\beta - 5} \frac{1}{2(1 + t^2)}$ non tende a zero al tendere di t a zero, g non é differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha + 2\beta \leq 5$. Inoltre da (ii) segue che g non é differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.

Sia dunque $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha + 2\beta > 5$. Da (i) e (*) segue:

$$\begin{aligned}
\alpha \geq 1, \alpha + 2\beta > 5 &\Rightarrow \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^4 + y^2} \leq \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^4 + y^2} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0 \\
\alpha < 1, \alpha + \beta > 3 &\Rightarrow \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|y|^{\beta + \alpha - 1}}{x^4 + y^2} \left[\frac{|x|^{2\alpha} |y|^{2-2\alpha}}{x^2 + y^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq |y|^{\alpha + \beta - 3} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

(iv) Se $\alpha < 1$ e $\gamma \gg 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta - 2 - \gamma(1 - \alpha)} [(\alpha - 4)t^{4\gamma - 2} + \alpha]}{(t^{4\gamma - 2} + 1)^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Se $\beta < 1$ e $\gamma \gg 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, t^\gamma) = \frac{t^{\alpha - 4 - \gamma(1 - \beta)} [\beta + (\beta - 2)t^{2\gamma - 4}]}{(1 + t^{2\gamma - 4})^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Inoltre, $\frac{\partial g}{\partial y}(t, t^2) = \frac{\beta - 1}{2} t^{\alpha + 2\beta - 6}$ non tende a zero al tendere di t a zero se $\alpha + 2\beta \leq 6$ e quindi neanche in tal caso f ha derivate parziali continue in $(0, 0)$.

Siano quindi $\alpha, \beta \geq 1$, $\alpha + 2\beta > 6$. Da (i) segue

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| &\leq \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^4 + y^2} \frac{(\alpha - 4)x^4 + \alpha y^2}{x^4 + y^2} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0 \\
\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| &\leq \beta \frac{|y|^{\beta-1} |x|^\alpha}{x^4 + y^2} \rightarrow_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$