AM2: Tracce delle lezioni- XII Settimana

PROBLEMA DI CAUCHY: Dipendenza continua dai dati iniziali

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Se $\gamma(t), \beta(t), \quad t \in [0,T]$ sono soluzioni del sistema differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

allora esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| e^{Lt} \quad \forall t \in [0,T]$$

Ció segue da $$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq$$

$$\leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| + \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\| d\tau \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| + L \int_0^t \|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\| d\tau$$

($L =$ costante di Lipschitzianitá di f in B_R ove R é tale che $\|\gamma(t)\|, \|\beta(t)\| \leq R \quad \forall t \in [0,T]$) e dalla

Diseguaglianza di Gronwall

Se $\varphi \in C([0,T], \mathbf{R}^+)$ soddisfa una diseguaglianza del tipo

$$\exists A, B > 0 : \quad \varphi(t) \leq A + B \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0,T]$$

allora

$$\varphi(t) \leq A e^{Bt} \quad \forall t \in [0,T]$$

Infatti, se $\tilde{\varphi}(t) := A + B \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ si ha che

$$\varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t) \quad \Rightarrow \quad [\tilde{\varphi}]'(t) = B\varphi(t) \leq B\tilde{\varphi}(t) \quad \Rightarrow \quad (\log \tilde{\varphi})' \leq 1$$

e quindi, integrando, da 0 a t e prendendo l'esponenziale,

$$\tilde{\varphi}(t) \leq \tilde{\varphi}(0) e^{Bt} = A e^{Bt} \qquad \forall t \in [0,T]$$

NOTA $\varphi(t) \leq A + B \left| \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \right| \quad \forall t \in [-T, 0] \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) \leq A e^{B|t|} \quad \forall t \in [-T, 0]$.
Basta applicare quanto sopra a $\psi(t) = \varphi(-t), t \in [0,T]$: $t \in [-T, 0] \quad \Rightarrow$

$$\psi(-t) = \varphi(t) \leq A - B \int_0^t \varphi(\tau) d\tau = A + B \int_0^{-t} \varphi(-\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \psi(-t) \leq A + e^{-Bt} = \varphi(t) e^{B|t|}$$

PROBLEMA DI CAUCHY: prolungabilitá, soluzione massimale, esistenza globale

Usando il Teorema di esistenza e unicitá, si vede, con un argomento di continuazione, che se $\gamma \in C^1((a,b))$ e $\beta \in C^1((\tilde{a},\tilde{b}))$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

e se $(a,b) \subset (\tilde{a},\tilde{b})$, allora $\gamma \equiv \beta$ in (a,b): β é un prolungamento della soluzione γ.

Una soluzione non prolungabile si chiama massimale. La soluzione massimale é evidentemente unica ed il suo intervallo di definizione si chiama intervallo massimale di esistenza e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).

Se $t^-(x_0) = -\infty$, $t^+(x_0) = +\infty$, diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette soluzione globale o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$

mentre il problema $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$, $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, $t \in (t^-, t^+)$ soluzione massimale. Allora

$$M := \sup_{t \in (t^-, t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad t^- = -\infty, \quad t^+ = +\infty$$

In particolare, se γ é limitata allora γ é definita per tutti i tempi.

Infatti, $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|\int_s^t f(\gamma(\tau)) d\tau\| \leq M|t - s| \quad \forall s, t \in (t^-, t^+)$ ovvero γ é uniformemente continua in (t^-, t^+) e quindi, se $t^+ < +\infty$, esiste $\gamma(t^+) := \lim_{t \to t^+} \gamma(t)$. Detta allora $\hat{\gamma}$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat{\gamma}(t^+) = \gamma(t^+)$, la funzione uguale a γ in $[0, t^+)$ ed uguale a $\hat{\gamma}$ in $[t^+, t^+ + \delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0, t^+ + \delta]$ contraddicendo il carattere massimale di t^+.

Proposizione Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Se

$$\exists A, B > 0 : \qquad \|f(x)\| \leq A + B\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora le soluzioni del sistema differenziale $\dot{x} = f(x)$ sono definite globalmente.

Sia γ soluzione massimale di valore iniziale $\gamma(0)$. Supponiamo $t^+ < +\infty$. Da

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(0)\| + \int_0^t \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \leq At + B \int_0^t \|\gamma(\tau)\| d\tau \quad \forall t < t^+$$

e dalla diseguaglianza di Gronwall segue che

$$\|\gamma(t)\| \leq Ae^{Bt} \qquad \forall t < t^+$$

e quindi

$$\sup_{t \in [0,t^+)} \|\gamma(t)\| \leq Ae^{Bt^+} < +\infty$$

e quindi γ é limitata . Ma γ limitata implica $t^+ = +\infty$, contraddizione.

UN ESEMPIO. Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ matrice $n \times n$. Le soluzioni del sistema differenziale lineare di n equazioni nelle n incognite $x_i(t)$

$$\dot{x} = \mathcal{A}\, x, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t)$$

sono definite per tutti i tempi.

Lo stesso vale per sistemi lineari a coefficenti variabili e limitati, cioé quando

$$a_{ij} = a_{ij}(t), \qquad t \in \mathbf{R}, \qquad \sup_t |a_{ij}(t)| < +\infty$$

Infatti ogni sistema non autonomo, ove cioé il campo $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ dipenda esplicitamente dalla variabile indipendente t, ovvero sistemi della forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \qquad t \in \mathbf{R}$$

si possono scrivere, equivalentemente, come sistemi autonomi introducendo un nuovo campo $\hat{f} \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ cosí definito

$$\hat{f}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), 1)$$

Evidentemente, $\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)$, $x_i(t_0) = c_i$, $i = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow$

$$\dot{x}_i(t) = \hat{f}_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), x_{n+1}(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \dot{x}_{n+1}(t) = 1,$$
$$x_i(t_0) = x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0.$$