AM2 2006-2007: I ESONERO

TEMA 1. Siano $f_n \in C^1((a,b))$, (a,b) intervallo limitato.

Provare che se f_n converge puntualmente a f in (a,b) ed f'_n converge uniformemente a g in (a,b), allora $f \in C^1((a,b))$ e $f' = g$.
Mostrare con un controesempio che l'uniforme convergenza delle f'_n é essenziale.

Provare poi che, nelle stesse ipotesi, f_n converge uniformemente ad f in (a,b).
Mostrare inoltre, con un esempio, che le f_n possono non convergere in alcun punto anche se le f'_n convergono uniformemente.

TEMA 2. Provare che una serie di funzioni totalmente convergente su un insieme E é ivi uniformemente convergente.

Mostrare con un esempio che una serie di funzioni puó essere uniformemente convergente in un insieme E senza essere totalmente convergente in E.

TEMA 3. Sia $0 < r < +\infty$ il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$.
Provare che

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$ é analitica in $(-r,r)$

TEMA 4. Sia f analitica in (a,b).
Provare che se le derivate di f sono tutte nulle in un punto x_0 di (a,b) allora f é costante in (a,b).

TEMA 5 (Teorema di Heine-Cantor).

Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^2$. Sia $f \in C(K)$.
Provare che f é uniformemente continua in K.

ESERCIZIO 1 Trovare il raggio di convergenza r di

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x \arctan n)^n \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \cos(ni) x^n$$

Determinare, in caso $0 < r < +\infty$ il comportamento di ciascuna serie in $x = r, \quad x = -r.$

Determinare l'insieme su cui converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{x^{4n}}$.

ESERCIZIO 2 Sia $f_n(x) = xe^{-nx^2}$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n'(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

Stabilire se la convergenza delle f_n, delle f_n', é anche uniforme e se é vero che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]'$$

ESERCIZIO 3 Sia $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1} e^{-nx}, \qquad x \geq 0.$

Provare che la convergenza non é totale.

Provare che $\int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}\right] dx < +\infty.$

Utilizzare tale informazione per calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)dx.$

ESERCIZIO 4 Sia $f(x,y) = \frac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^6}$.

Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} f(x,y) \qquad , \qquad \lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)$$

SOLUZIONI

TEMA 4.

La funzione $g(x) := f(x) - f(x_0)$ é analitica al pari di f e si annulla insieme a tutte le sue derivate in x_0. Per il principio di identitá per funzioni analitiche, $g \equiv 0$, cioé $f \equiv f(x_0)$.

ESERCIZIO 1

(i) Siccome $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$, il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x \arctan n)^n$ é $\frac{2}{\pi}$.

Poi, la serie non converge in $x = \pm\frac{2}{\pi}$, perché il termine n-esimo $(\pm\frac{2}{\pi} \arctan n)^n$ non converge a zero. Infatti, per la regola de l'Hopital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[\frac{2}{\pi}\arctan x]-1}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi}\arctan n = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} + \circ(\frac{1}{n}) \quad \Rightarrow$$

$$(\frac{2}{\pi}\arctan n)^n = e^{n\log(\frac{2}{\pi}\arctan n)} = e^{n[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n} + \circ(\frac{1}{n})]} \to_n e^{-\frac{2}{\pi}}$$

(ii) Il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(ni)x^n$ é $\frac{1}{e}$, perché

$$\cos(ni) = \cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \qquad \text{e quindi} \qquad |\cos(ni)|^{\frac{1}{n}} = e\left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \to_n e.$$

La serie non converge agli estremi perché il termine n-esimo non va a zero:

$$\cos(in)\frac{1}{e^n} = \frac{1+e^{-2n}}{2} \to_n \frac{1}{2}$$

(iii) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{x^{4n}}$ converge se $\frac{1}{x^4} < \frac{1}{3}$, ovvero se $x \in (-\infty, -3^{\frac{1}{4}}) \cup (3^{\frac{1}{4}}, +\infty)$. Infatti, posto $y = \frac{1}{x^4}$, la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n y^n$ ha raggio di convergenza $\frac{1}{3}$.

Infine, tale serie non converge in $x = \pm 3^{\frac{1}{4}}$ perché in tali punti $|\frac{3^n}{x^{4n}}| \equiv 1$.

ESERCIZIO 2

Intanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} xe^{-nx^2} = 0 \quad \forall x$.

La convergenza é anche uniforme, perché $f_n'(x) = e^{-nx^2}(1-2nx^2)$ si annulla esattamente in $\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$ e quindi $\max_{\mathbf{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} \to_n 0$.

Poi, $f_n'(x) \to_n 0, \quad \forall x \neq 0$ e $f_n'(0) = 1 \quad \forall n$ e quindi $f_n' \to \chi_{\{1\}}$ e quindi la convergenza non é uniforme, perché la funzione limita é discontinua in $x = 0$ mentre le f_n' sono continue in $x = 0$.

Infine, l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]'$$

vale solo se $x \neq 0$.

ESERCIZIO 3.

1. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1} e^{-nx}$ non é totalmente convergente:

$\sup_{\{x\geq 0\}} |\frac{\sin(nx)}{n+1} e^{-nx}| \geq \frac{\sin(n\frac{1}{n})}{n+1} e^{-n\frac{1}{n}} = \frac{\sin(1)}{e(n+1)}$ e quindi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup_{\{x\geq 0\}} |\frac{\sin(nx)}{n+1} e^{-nx}| = +\infty$.

NOTA La serie non é neppure uniformemente convergente, perché non soddisfa la condizione di Cauchy: fissato $N \in \mathbf{N}$, si ha $\sup_{\{x\geq 0\}} |\sum\limits_{n=N}^{2N} \frac{\sin(nx)}{n+1} e^{-nx}| \geq$

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin(n\frac{1}{N})}{n+1} e^{-n\frac{1}{N}} \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{\sin(N\frac{1}{N})}{2N+1} e^{-2N\frac{1}{N}} = (N+1)\frac{\sin 1}{e^2(2N+1)} > \frac{\sin 1}{2e^2}$$

2. La serie converge totalmente in $[\delta, +\infty), \quad \forall \delta > 0$, giacché

$$x \geq \delta > 0 \quad \Rightarrow \quad |\frac{\sin(nx)}{n+1} e^{-nx}| \leq \frac{1}{n+1} e^{-n\delta}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty$$

In particolare, é totalmente convergente in $[\delta, +\infty)$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

3. É $\int\limits_0^{+\infty} \left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}\right] dx < +\infty$. Infatti, trattandosi di serie di funzioni non negative, convergente uniformemente sui compatti di $(0, +\infty)$, risulta

$$\int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx\right] = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{e^{-nx}}{n(n+1)}\Big|_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

4. La f si puó integrare per serie, perché la successione delle somme parziali é (grazie al punto 3.) equidominata:

$$|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n+1}\, e^{-nx}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

Inoltre, come visto, c'é totale convergenza sui compatti di $(0, \infty)$. Dunque

$$\int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1}\, e^{-nx} \right] dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1}\, e^{-nx} dx \right] =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{n+1}\, e^{-t} \frac{dt}{n} \right] = \left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t}\, dt \right] \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t}\, dt = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 4.

1. $x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2+y^6} \right| \leq \frac{x^2 |y|^3}{x^2+y^6} \leq \frac{(x^2+y^6)|y|^3}{x^2+y^6} \leq |y|^2 \leq (x^2 + y^2)$ e quindi

$$\frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2 + y^6} \to_{(x,y)\to(0,0)} 0$$

2. $x^2 + y^2 \geq R^2 > 1 \Rightarrow x^2 + y^6 \geq y^6 - y^2 + R^2 \geq R^2 - 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2+y^6} \right| \leq \frac{1}{R^2-1}$ e quindi

$$\frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2 + y^6} \to_{x^2+y^2\to+\infty} 0$$