Corso di Analisi $\mathbb{C}$omplessa del Prof. Bessi

Tutorato II del $08-03-2007$

Tutore: Gabriele Nocco

Esercizio 1

Calcoare

$$\int_\gamma Re(z)dz$$

dove γ rappresenta

1. il segmento che unisce 0 a $(1+i)$
2. il segmento che unisce $(1+i)$ a 0
3. la circonferenza centrata in 0 e di raggio 1 con percorrenza antioraria

Esercizio 2

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}$$

dove γ sta per la circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine e di percorrenza antioraria

Esercizio 3

Calcolare usando la formula integrale di Cauchy

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}$$

dove γ é la circonferenza unitaria centrata nell'origine e di percorrenza antioraria

Esercizio 4

Calcolare usando la formula integrale di Cauchy

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

dove γ é la circonferenza unitaria centrata nell'origine e di percorrenza oraria

Esercizio 5

Sia $a>0$, determinare il raggio di convergenza delle serie complesse:

1. $\sum_{n\geq 0} a^n z^n$
2. $\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$

Nell'ultimo punto controllare la convergenza puntuale in $z = 1, -1, i, -i$

Esercizio 6

$f(x + iy) = x^2 + y^2$. Dimostrare che é differenziabile in senso complesso solo nell'origine.

Esercizi per casa

1. Sia f, g analitiche in Ω e sia γ una curva chiusa in Ω.
   Dimostrare che
   $$\int_\gamma f(z)\overline{g'(z)dz}$$
   é immaginario

   (Suggerimento: considerare la parte reale dell'integrale, usare ripetutamente le equazioni di Cauchy-Riemann per dimostrare che la parte reale é nulla)
2. Calcolare $\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a|^2}$ dove γ é la circonferenza di raggio ρ con $\rho \neq 0$ e $|\rho| \neq a$
   (Suggerimento: usare $z\bar{z} = \rho^2$ e $|dz| = -i\rho\frac{dz}{z}$)
3. Calcolare $\int_\gamma |z-1||dz|$ dove γ é la solita circonferenza unitaria nell'origine e percorsa in senso antiorario.