Capitolo 3

Prodotti derivati: forward, futures ed opzioni

Per poter affrontare lo studio dei prodotti derivati occorre fare delle ipotesi sul mercato finanziario che permettono di semplificare dal punto di vista matematico la trattazione dell'argomento. Il funzionamento reale di tali mercati è sicuramente più complesso, ma la sua trattazione va oltre gli scopi di questo corso. Per gli studenti interessati ai meccanismi di mercato, si veda ad esempio, J. Hull, Opzioni, Futures e altri derivati, Ed. Il Sole24Ore. Nel mercato che considereremo:

- non esistono costi di transazione (spese per acquisti e/o vendite di attività finanziarie – azioni, obbligazioni – spese di gestione di depositi bancari....);
- i tassi di interesse per i prestiti sono gli stessi che per i depositi;
- è permessa la vendita allo scoperto;
- è permesso frazionare arbitrariamente una qualsiasi attività finanziaria. Si possono ad esempio vendere 0.0392 azioni di una società;
- esiste una attività finanziaria detta *senza rischio*, che possiamo identificare con un deposito bancario o con un'obbligazione (senza rischio di fallimento) caratterizzata da un tasso di interesse r, con capitalizzazione continua o periodale, a secondo del modello considerato.

Forwards, futures e opzioni fanno parte di una famiglia di prodotti finanziari, detta *derivati*. Un derivato è uno strumento finanziario il cui valore dipende o deriva da quello di un'altra attività.

3.1 Contratti Forward e Futures

Definizione 3.1. *Un forward è un contratto (o accordo) sottoscritto tra due controparti, A e B, per acquistare (o vendere) un certo bene ad un prezzo stabilito F ad una data specificata T nel futuro.*

Un po' di terminologia:

- il prezzo F stabilito oggi si dice *prezzo di consegna*;
- la data specificata T si dice *data di consegna* o *maturità*;
- un certo bene può essere petrolio, oro, beni agricoli (frumento, soia, zucchero...), azioni, valute,...;
- con il forward si ha *l'obbligo di acquisto (o vendita)* del bene sottostante;
- il prezzo del bene sottostante si chiama *prezzo spot*.

Esempio 3.1. *Un contratto forward impegna all'acquisto* 10 *Tons. di zucchero ad un certo prezzo fissato oggi (07/03/2005) con consegna in data 07/06/2005. Quindi ci sono due controparti legate da un contratto: una si impegna all'acquisto e l'altra alla vendita. Il prezzo è fissato oggi come anche la data della consegna.*

E' importante sottolineare l'impegno che nasce tra le due parti e il fatto che oggi ($t = 0$) non c'è alcuno scambio di denaro: quindi all'inizio il contratto vale 0.

L'utilità dei contratti forward sta nel fatto che bloccano il prezzo del prodotto sottostante fino alla data di consegna, rendendo quindi immune il compratore da eventuali aumenti. Il rischio potrebbe essere che da oggi alla data di consegna il prezzo del bene scenda, e sia più basso rispetto a quello che ormai ho fissato e che sono obbligato a pagare. In ogni caso ci guadagna una delle controparti (l'acquirente o il venditore) a seconda che il prezzo di mercato del bene salga o scenda rispetto al prezzo bloccato dal contratto forward. Se nel corso di validità del contratto il prezzo scende, l'acquirente ci rimette e il venditore ci guadagna. C'è allora la tentazione per l'acquirente di non onorare il contratto alla data di scadenza (e i contratti futures risolvono tale problema).

Il contratto forward è un contratto *over the counter*, ossia fuori dal mercato borsistico (nel senso che non è da esso regolamentato); è un contratto tra due controparti (ad esempio tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria ed uno dei suoi clienti) mediato da qualcuno (ad esempio un notaio). Esiste comunque un mercato dei contratti forward, nel senso che posso vendere il mio contratto forward a qualcun altro (e per chi lo acquista il prezzo di consegna F continua ad essere bloccato, così come le altre clausole del contratto).

Il principale rischio di un contratto forward è la possibilità che una delle controparti non onori gli impegni contrattuali. I contratti *futures* sono contratti forwards ma regolamentati all'interno di un mercato borsistico: tali contratti sono regolati da precise regole di funzionamento e prevedono un meccanismo di agganciamento al mercato (*(marking to market)*. Chi entra in un contratto future deve effetture tramite un broker un versamento in un conto di deposito, chiamato *margin account*, il cui importo è fissato dalle regole di mercato. Alla fine di ogni giorno lavorativo tale conto viene aggiustato in modo da compensare i profitti o le perdite dell'investitore

Affrontiamo ora i seguenti importanti problemi:

1. quale deve essere il prezzo di consegna F?

2. Poichè e' possibile una compravendita dei contratti forward, qual è il loro valore in un generico istante di tempo successivo a quello della stipula, $0 < t < T$?

Vedremo ora come il concetto di arbitraggio, o meglio di assenza di opportunità di arbitraggio, permette di rispondere ad entrambe le domande. Il mercato considerato è costituito dal bene sottostante e da una attività senza rischio (il deposito bancario), caratterizzata da un tasso di interesse r composto continuamente.

Useremo le seguenti notazioni:

- f_t = valore del contratto forward al tempo t: sappiamo già che $f_0 = 0$ e possiamo anche affermare che al tempo T si deve avere:

  $$f_T = S_T - F_0 (\text{long forward}), \quad f_T = F_0 - S_T (\text{short forward}),$$

  dove S_T è il prezzo spot del sottostante al tempo T. Questa quantità rappresenta infatti il guadagno (o la perdita se negativa) per chi assume una posizione lunga o corta rispettivamente sul contratto.

- F_0 = prezzo di consegna, ossia la quantità di denaro stabilito oggi ($t = 0$) ma pagato alla scadenza T. Si definisce inoltre *prezzo forward*, che indicheremo con F_t, il prezzo di consegna che si determinerebbe se il contratto fosse stipulato al tempo t.

Proposizione 3.1. *Sia S_0 il prezzo spot del bene al tempo della stipula del contratto, $t = 0$, T la data di consegna del bene e r il tasso di interesse certo su un deposito bancario per il periodo di vita del contratto $[0, T]$ che supponiamo composto continuamente. Allora in assenza di opportunità di arbitraggio*

$$F_0 = S_0 e^{rT}.$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, mostrando che se $F_0 \neq S_0 e^{rT}$ si verifica un'opportunità di arbitraggio. Consideriamo separatamente i casi $F_0 > S_0 e^{rT}$ e $F_0 < S_0 e^{rT}$.

Se fosse $F_0 > S_0 e^{rT}$ potremmo costruire un'opportunità d'arbitraggio per il venditore del bene. Infatti, al tempo $t = 0$ il venditore prende in prestito dalla banca S_0 € al tasso r per comprare il bene e tenerlo fino al tempo $t = T$. A tale tempo il venditore consegna il bene all'acquirente ricavando F_0 € con i quali può saldare il suo debito con la banca, alla quale deve $S_0 e^{rT}$. Il suo guadagno certo sarebbe dunque $F_0 - S_0 e^{rT} > 0$.

Nel caso contrario, $F_0 < S_0 e^{rT}$, possiamo costruire un'opportunità di arbitraggio per l'acquirente. Al tempo $t = 0$ l'acquirente vende allo scoperto il bene, guadagnando S_0 €, che mette in banca fino al tempo $t = T$ al tasso d'interesse r. A T l'acquirente, che ha in banca $S_0 e^{rT}$ €, rispetta l'impegno pagando F_0 € al venditore per il bene, chiudendo la vendita allo scoperto e realizzando un guadagno certo pari a $S_0 e^{rT} - F_0 > 0$. ■

La costruzione dell'arbitraggio, in entrambi i casi, è stata possibile effettuando operazioni di vendita (che quindi permettono di incassare) di ciò che viene sopravvalutato e/o di acquisto di ciò che è sottovalutato. E' questo la tecnica più semplice per costruire un arbitraggio.

Veniamo al secondo problema e osserviamo anzitutto che il valore di un contratto forward (long forward) alla scadenza è

$$f_T = S_T - F_0$$

($f_T = F_0 - S_T$ per uno short forward) e che il prezzo di consegna per un forward stipulato al tempo $t \in (0, T)$, è chiaramente $F_t = S_t e^{r(T-t)}$ (F_t è il *prezzo forward*) e che vale la relazione

$$f_t = S_t - S_0 e^{r\ t}. \tag{3.1}$$

Dimostriamo tale affermazione: se fosse $f_t > S_t - S_0 e^{r\ t}$, ovvero $f_t + S_0 e^{r\ t} > S_t$, potrei al tempo t assumere una posizione short sul forward, incassando così f_t, chiedere in prestito la quantità $S_t e^{r\ t}$ e comprare un'azione, spendendo S_t. Per l'ipotesi fatta mi rimane una quantità pari a $\epsilon = f_t +$

$S_0 e^{r\ t} - S_t > 0$. Al tempo T il valore finale della posizione short sul forward è $F_0 - S_T$, alla banca devo $S_0 e^{r\ t} e^{r(T-t)}$ ed ho un'azione il cui valore è S_T: dunque il valore complessivo della mia posizione è $F_0 - S_T - S_0 e^{r\ t} e^{r(T-t)} + S_T = 0$, poichè $F_0 = S_0 e^{r\ T}$. Ho quindi realizzato un arbitraggio poiche' mi rimane la quantità (attualizzata alla scadenza T) pari a $\epsilon e^{r(T-t)}$. Poichè il caso $f_t + S_0 e^{r\ t} < S_t$ si tratta ovviamente allo stesso modo, la (3.1) è provata.

Dalla (3.1) abbiamo dunque che il valore del contratto forward può essere espresso come

$$f_t = S_t - S_0 e^{r\ t} = S_t - F_0 e^{-r(T-t)} = (F_t - F_0) e^{-r(T-t)}.$$

La quantità $\tau = T - t$ è solitamente detta *vita residua* del contratto (*time to maturity*).

3.2 Contratti di opzione

I contratti di opzione sono contratti derivati relativi ad azioni, valute, indici azionari ....(sono i possibili *sottostanti* il contratto) ma in generale non sono su beni; futures e forwards, invece, vengono in genere usati per bloccare il prezzo di un bene durante un certo periodo.

Definizione 3.2. *Il contratto di opzione su un'attività finanziaria dà al detentore il diritto (quindi non l'obbligo) di acquistare o vendere l'attività ad una fissata data futura T (maturità) ad un certo prezzo prefissato K (prezzo strike o prezzo d'esercizio).*

Sottolineiamo il fatto che le opzioni danno il diritto al portatore di fare qualcosa e il portatore non è obbligato ad esercitare questo diritto, a differenza dei forwards e dei futures nei quali ci si impegna a comprare o vendere l'attività sottostante. Quindi, mentre la stipula di un contratto forward o di un contratto futures non costa nulla, per acquistare un contratto di opzione si deve sostenere un costo. Il versamento iniziale che si fa per entrare in un contratto d'opzione è detto *premio*.

Esistono diverse tipologie di contratti di opzione:

- *opzione call*: dà il diritto di acquistare l'attività sottostante ad un prezzo precedentemente fissato.

- *opzione put*: dà il diritto di vendere l'attività sottostante ad un prezzo precedentemente fissato.

Se il diritto di acquisto o vendita può essere esercitato solo alla scadenza, l'opzione (call o put) si definisce *europea*; se invece può essere esercitato in un qualsiasi istante tra la data di stipula e la scadenza, si definisce *americana*. In generale quindi il premio di un'opzione americana è maggiore di quello di un'opzione europea poichè offre maggiori opportunità. La terminologia Europea e Americana non ha nulla a che vedere con la geografia.

In un contratto di opzione ci sono sempre due controparti: chi acquista l'opzione assume una posizione *lunga* (*long call* o *long put*), mentre chi vende l'opzione assume una posizione *corta* (*short call* o *short put*). Chi compra la call (o la put) ha il diritto di acquistare (o vendere) il sottostante al prezzo strike fissato e alla data futura fissata da colui che vende l'opzione call (o put). E' chi acquista l'opzione che può esercitare il diritto di opzione!

Possiamo assumere d'ora in poi per fissare le idee che l'attività sottostante sia un'azione e che l'opzione sia di tipo europeo.

3.2.1 Opzione call

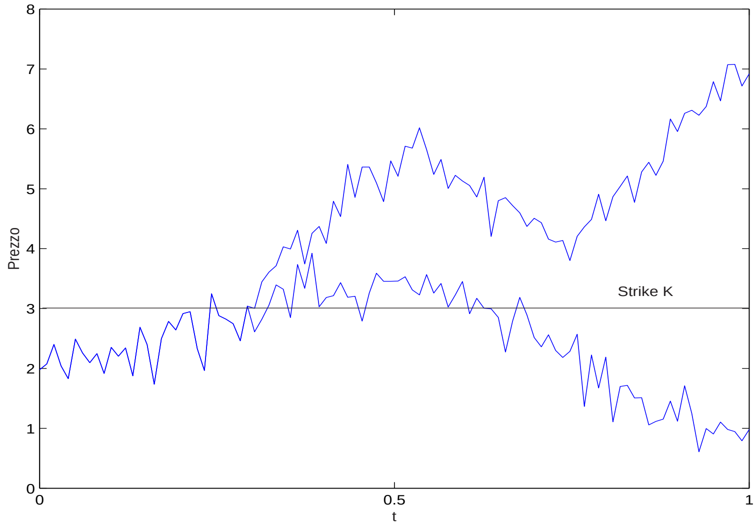
Supponiamo di entrare in un contratto d'opzione al tempo $t = 0$ (oggi) e sia T la data di scadenza del contratto (maturità) ovvero la data in cui si può effettuare l'esercizio, S_0 il prezzo spot odierno dell'azione sottostante il contratto e K il prezzo strike prefissato (per unità di azione).

Esempio 3.2. *(Contratto call tipo) Oggi (14/3/2005) consideriamo un contratto di opzione call su 100 azioni Microsoft con strike* $K = 10$ € *(per unità d'azione) e scadenza* 3 *mesi. Il prezzo spot di Microsoft si legge sul giornale. Se acquisto questo tipo di contratto, ho la possibilità tra* 3 *mesi di acquistare* 100 *azioni Microsoft pagando* 1000 €*. Ci sono due possibili scenari:*

- *se tra* 3 *mesi le azioni Microsoft valgono* 20 €*, allora usufruisco del diritto di opzione, compro le* 100 *azioni pagandole* 1000 €*, le rivendo subito sul mercato incassando* 2000 *euro. Il guadagno netto è quindi* 1000 €*;*

- *se tra* 3 *mesi le azioni Microsoft valgono* 5 €*, allora non usufruisco del diritto di opzione, perdendo in questo modo il versamento iniziale (premio).*

Quindi chi acquista l'opzione call scommette sul rialzo dell'azione sottostante, chi vende l'opzione call scommette sul suo ribasso. E' dunque una scommessa per entrambe le parti. Nel caso dell'esempio, le possibili situazioni future che mi interessano sono due: alla scadenza il prezzo spot va sopra oppure sotto il prezzo strike.



In generale quindi per avere un guadagno, vorrei che il prezzo spot alla scadenza del sottostante, S_T si arresti al di sopra del prezzo strike K:

- se $S_T \geq K$ usufruisco del diritto di opzione e compro le azioni, le rivendo subito sul mercato guadagnando $S_T - K$ € per azione;
- se $S_T < K$ lascio perdere, ossia non esercito il diritto di opzione e perdo il versamento iniziale.

L'acquirente di un opzione call ha quindi un guadagno alla scadenza, o *pay off*, per unità d'azione dato da

$$c_T = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Chiaramente tale pay off futuro è aleatorio. In forma grafica, Fig. (3.1).

Occorre comunque considerare il premio iniziale c_0, da pagare per chi assume la posizione long e da incassare per chi assume la posizione short, che deve essere quindi sottratto dal guadagno finale (payoff netto): trascurando il valore temporale del denaro

$$c_T - c_0 = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+ - c_0.$$

Osserviamo che i due grafici sono simmetrici rispetto alle ascisse: l'acquirente potenzialmente può guadagnare molti soldi, mentre al contrario il venditore potenzialmente può perderne molti! Le due posizioni di acquirente e venditore devono comunque essere equivalenti, altrimenti ci sarebbe una

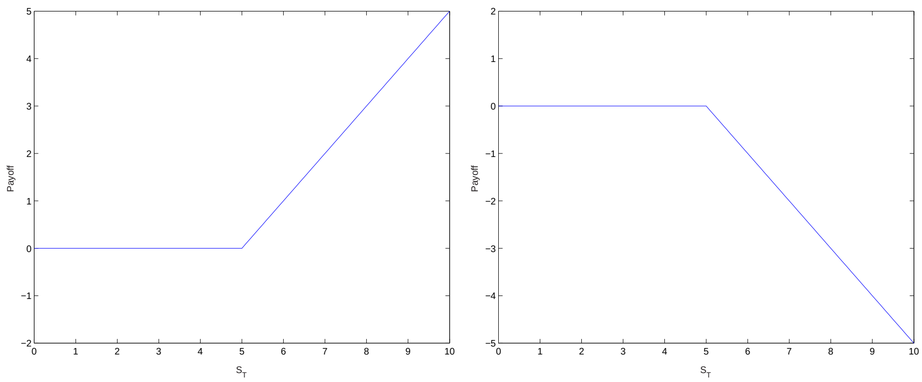


Figura 3.1: Payoffs per posizioni long call e short call. Sulle ascisse del grafico sono rappresentati tutti i possibili prezzi spot dell'azione alla scadenza S_T, mentre sulle ordinate i payoffs dell'acquirente della call (long call position) e del venditore (short call position).

posizione più vantaggiosa rispetto ad un'altra. Il premio c_0 (che il venditore si assicura) deve essere tale da rendere equivalenti le due posizioni.

Nei mercati reali, dove ormai avviene tutto per via telematica, quando si acquista un contratto call (put) si fa in realtà solo la scommessa: se il prezzo spot a scadenza è maggiore (minore) dello strike viene pagato subito il guadagno, se è minore (maggiore) si perde il premio. Analogamente per chi vende la call (put). In genere i prezzi strike sono molto vicini alle quotazioni giornaliere, poco in più o poco in meno. Tali prezzi strike danno quindi un'idea delle aspettative degli operatori sulle possibilità di rialzo o di ribasso delle azioni sottostanti.

3.2.2 Opzione put

L'opzione put dà il diritto (all'acquirente dell'opzione) e non l'obbligo di vendere ad una certa data futura T e ad un prezzo prefissato oggi K, un certo numero di azioni. Per ottenere un guadagno, chi acquista l'opzione spera che alla scadenza il prezzo spot S_T sia al di sotto del prezzo strike.

Esempio 3.3. *(Contratto put tipo) Come nell'esempio precedente, consideriamo oggi (14/3/2005) un contratto di opzione put su* 100 *azioni Microsoft con strike* $K = 10$ € *(per unità d'azione) e scadenza* 3 *mesi. Con questo contratto ho la possibilità tra* 3 *mesi di vendere* 100 *azioni Microsoft al prezzo di* 10 € *l'una, incassando quindi* 1000 €*. Vediamo cosa accade nei due possibili scenari futuri:*

- *se tra 3 mesi le azioni Microsoft valgono 20 €, allora non usufruisco del diritto di opzione, poichè dovrei vendere le 100 azioni che valgono sul mercato 2000 € al prezzo di 1000 €;*

- *se tra 3 mesi le azioni Microsoft valgono 5 euro, allora usufruisco del diritto di opzione, acquistando al prezzo di 500 € le azioni sul mercato e rivendendole subito a 1000 € con un guadagno netto di 500 €.*

In generale quindi per avere un guadagno, al contrario di ciò che avviene per le opzioni call, il prezzo spot alla scadenza del sottostante, S_T deve essere al di sotto del prezzo strike K:

- se $S_T < K$ usufruisco del diritto di opzione e compro le azioni, le rivendo subito sul mercato guadagnando $K - S_T$ € per azione;

- se $S_T \geq K$ lascio perdere, ossia non esercito il diritto di opzione, perdendo il premio iniziale.

In un'opzione put l'acquirente ha un guadagno alla scadenza pari a

$$p_T = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+, \tag{3.2}$$

(Fig. (3.2)).

Se p_0 è il premio iniziale, allora il guadagno netto per l'acquirente della put è (trascurando il valore temporale del denaro)

$$p_T - p_0 = \max\{K - S_T, 0\} - p_0 \tag{3.3}$$

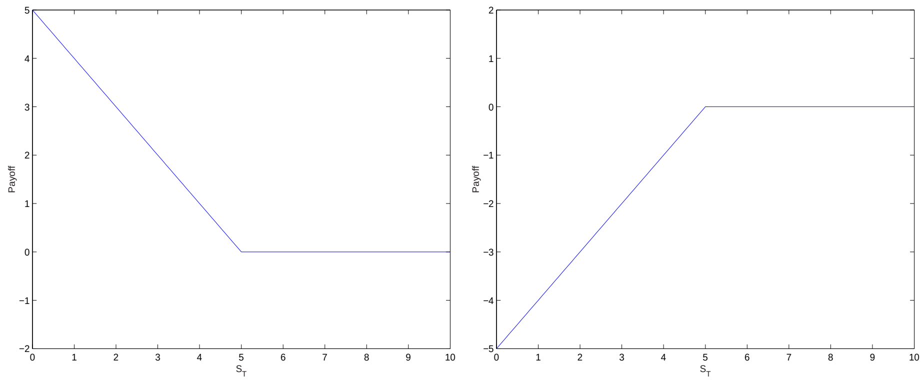


Figura 3.2: Payoffs per posizioni long put e short put.

3.3 Proprietà delle opzioni

Le opzioni call e put descritte vengono chiamate *plain vanilla* e rappresentano la più semplice tipologia di contratto derivato. Combinando tra loro calls e puts si possono definire derivati *fuori standard* anche molto complicati.

Osserviamo che:

- long call permette guadagni illimitati;
- long put permette guadagni al più $K - p_0$;
- short call permette perdite illimitate;
- short put permette perdite al più $p_0 - K$.

Ci domandiamo ora quali valori possono assumere a priori i premi delle opzioni call e put e se esiste una relazione tra i due.

3.3.1 Limiti sul valore dei premi

Ovviamente $c_0 \geq 0$ e $p_0 \geq 0$. Inoltre c_0 non può essere più alto del prezzo dell'azione: se l'opzione costasse quanto l'azione renderebbe come l'azione stessa, ma il rischio sarebbe maggiore. Deve quindi essere $c_0 \leq S_0$. In modo del tutto analogo si ha che $p_0 \leq K$ che è il massimo guadagno possibile per una put.

Per ottenere dei limiti più stringenti, premettiamo il seguente

Lemma 3.1. *Siano X_t e Y_t i valori di due beni nel mercato, $0 \leq t \leq T$. Se $X_T \geq Y_T$, allora in assenza di opportunità di arbitraggio deve essere $X_0 \geq Y_0$.*

Dim. Se per assurdo fosse $X_0 < Y_0$ potrei vendere allo scoperto Y_0 e comprare X_0: al tempo $t = 0$ avrei dunque $Y_0 - X_0 > 0$ mentre al tempo finale $t = T$ si avrebbe $X_T - Y_T \geq 0$ per ipotesi. $\square$

Siano c_t e p_t i valori della call e della put rispettivamente nell'intervallo di tempo $[0, T]$.

Proposizione 3.2. *In assenza di opportunità di arbitraggio vale*

$$\max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \leq c_0 \leq S_0$$

dove r è il tasso di interesse certo, S_0 è il prezzo spot al tempo $t = 0$, T è la scadenza del contratto, K è il prezzo strike e c_0 è il premio della call.

Dim. Consideriamo due investitori: al tempo $t = 0$ l'investitore I assume una posizione long call e deposita su un conto corrente una quantita' di denaro pari a Ke^{-rT}, mentre il secondo investitore assume una posizione long su azione. I due portafogli vengono tenuti fermi fino alla scadenza. Al tempo T il valore del portafoglio I è

$$v_T^{(I)} = c_T + (Ke^{-rT})e^{rT} = c_T + K$$

mentre quello del portafoglio II è

$$v_T^{(II)} = S_T.$$

Quindi

$$v_T^{(I)} = c_T + K = \max\{S_T - K, 0\} + K = \max\{S_T, K\} \geq S_T = v_T^{(II)}$$

e dunque per il Lemma (3.1) $v_0^{(I)} \geq v_0^{(II)}$, ovvero

$$c_0 + Ke^{-rT} \geq S_0 \Rightarrow c_0 \geq S_0 - Ke^{-rT}.$$

Poichè inoltre $c_0 > 0$, otteniamo il risultato. $\square$

Proposizione 3.3. *In assenza di opportunità di arbitraggio vale*

$$\max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} \leq p_0 \leq Ke^{-rT}$$

dove r è il tasso di interesse certo, S_0 è il prezzo spot al tempo $t = 0$, T è la scadenza del contratto, K è il prezzo strike e p_0 è il premio della put.

Dim. Come nella dimostrazione precedente, la disuguaglianza $\max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} \leq p_0$ si può provare considerando due portafogli, il primo formato assumendo un posizione long put e long su azione, il secondo da una quantità di denaro pari a Ke^{-rT} su conto corrente. La seconda disuguaglianza si può provare per assurdo: se $p_0 > Ke^{-rT}$ possiamo assumere una posizione short put, incassare il premio e depositarlo su c/c al tasso r. Al tempo T il portafoglio vale $p_0e^{rT} - \max\{K - S_T, 0\} \geq p_0e^{rT} - K > 0$, realizzando dunque un arbitraggio. $\square$

3.3.2 Put-Call parity

I payoffs dei contratti di opzione call e put scritte su uno stesso sottostante, con medesimo strike, sono legate dalle seguente relazione: poichè è immediato verificare che $x = \max\{x, 0\} - \max\{-x, 0\}$, abbiamo che

$$c_T - p_T = \max\{S_T - K, 0\} - \max\{K - S_T, 0\} = S_T - K.$$

La precedente relazione implica che acquistare una call (long call) e vendere una put (short put) su uno stesso sottostante e con medesimo prezzo strike K equivale ad un contratto forward sullo stesso sottostante con prezzo di consegna ancora uguale a K. In realtà possiamo dimostrare che i valori di un contratto call e di uno put sullo stesso sottostante sono legati sempre da una relazione, in assenza di opportunità di arbitraggio. Tale relazione è detta *relazione di parità put-call* (*put-call parity*).

Proposizione 3.4. *In assenza di opportunità di arbitraggio vale la relazione*

$$c_0 - p_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

dove r è il tasso di interesse certo, S_0 è il prezzo spot al tempo $t = 0$, T è la scadenza del contratto, K è il prezzo strike e p_0 e c_0 sono i premi della put e della call rispettivamente.

Dim. Consideriamo i due seguenti portafogli: il portafoglio I è formato assumendo una posizione long put e long su azione, mentre per il portafoglio II assumiamo una posizione long call e una quantità di denaro su c/c pari a Ke^{-rT}. Alla scadenza T abbiamo i seguenti valori

$$v_T^{(I)} = p_T + S_T = \max\{S_T, K\}$$

e

$$v_T^{(II)} = c_T + Ke^{-rT}e^{rT} = \max\{S_T, K\}$$

ovvero $v_T^{(I)} = v_T^{(II)}$. Per il Lemma (3.1) deve quindi essere, in assenza di opportunità di arbitraggio, $v_0^{(I)} = v_0^{(II)}$, quindi

$$p_0 + S_0 = c_0 + Ke^{-rT}.$$

□

Corollario 3.1. *In assenza di opportunità di arbitraggio vale la seguente relazione tra i valori di un contratto call e di uno put, per ogni $t \in [0, T]$:*

$$c_t - p_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

3.4 Alcune strategie di mercato

L'uso dei derivati non è in generale univoco. Si possono distinguere due principali categorie di operatori che utilizzano i prodotti derivati:

- *hedgers*: utilizzano i derivati per coprirsi dai rischi derivanti dalle variazioni delle variabili di mercato cui sono esposti (tassi d'interesse, tassi di cambio, valori azionari ...);

- *speculatori*: scommettono sull'andamento futuro delle variabili di mercato per realizzare profitti.

Esiste inoltre nei mercati un altro tipo di operatori, gli *arbitragisti*: assumono contemporaneamente più posizioni per realizzare profitti, sfruttando eventuali disallineamenti nelle quotazioni di mercato.

3.4.1 Uso dei derivati: hedgers e speculatori

Hedgers. Supponiamo che l'azienda italiana ABC S.p.A. firmi oggi 18/03/2005 un contratto per l'acquisto di un bene da una industria americana per un valore complessivo di 1˙000˙000 di USD con pagamento alla consegna che avverrà dopo 6 mesi, il 18/09/2005. Il tasso di cambio Euro/USD attuale è pari a $\frac{€}{\$} = 1,34$, quello forward a mesi è $\frac{€}{\$} = 1,30$. L'azienda italiana è esposta al *rischio di cambio*: fra 6 mesi il valore in Euro dei Dollari può essere differente (anche molto) da quello attuale.

La ABC S.p.A. può quindi non fare nulla e aspettare il giorno di consegna, cambiando al tasso spot del 18/09/2005 gli Euro in 1˙000˙000 di USD per onorare il contratto, oppure bloccare il valore del dollaro comprando oggi sul mercato dei forward a 6 mesi 1˙000˙000 di USD al prezzo di $\frac{1˙000˙000}{1,30} = 769˙230$ € (senza spendere nulla). Fra 6 mesi la ABC dovrà quindi pagare 769˙230 €. Se il tasso spot del cambio Euro/USD il 18/09/2005 sarà $\frac{€}{\$} = 1,4$ la cifra da pagare sarebbe $\frac{1˙000˙000}{1,4} = 714˙290$ €, quindi meno di 769˙230 €. Se invece il tasso spot sarà $\frac{€}{\$} = 1,25$ alla ABC il contratto costerebbe $\frac{1˙000˙000}{1,25} = 800˙000$ €.

Supponiamo ora che un investitore possieda 10˙000 azioni Fiat, il cui prezzo spot unitario oggi è (circa) $5,75$ €, per un valore complessivo di 57˙500 €. Vista l'incertezza sull'andamento del mercato dell'automobile italiano, l'investitore teme un forte ribasso del valore Fiat nei prossimi tre mesi. Per coprirsi da questo rischio (senza dover vendere le sue azioni) potrebbe dunque acquistare sul mercato delle opzioni 100 contratti put (ciascuno su 100 azioni), scadenza 3 mesi e prezzo d'esercizio $K = 4,5$ €. Se la quotazione unitaria delle put è di $0,015$ €, il costo totale della strategia di copertura è di $150(= 0,015 \times 100 \times 100)$ €.

Se fra 3 mesi il prezzo di un'azione Fiat sarà inferiore a $4,5$ €, l'investitore eserciterà le puts realizzando quindi $10˙000 \times 4,5 = 45˙000$ €, mentre se il prezzo sarà superiore a $4,5$ €le puts non saranno esercitate e l'investitore perderà solo il valore del premio iniziale, mantenendo però il suo capitale sopra i 45˙000 € (meno il costo iniziale).

La principale differenza tra i contratti forward ed i contratti di opzione nelle strategie di copertura sta dunque nel fatto che i primi neutralizzano il rischio insito nelle variazioni (aleatorie) delle attività sottostanti, mentre i secondi, al costo di un pagamento iniziale, permettono di proteggersi solo contro i movimenti sfavorevoli del sottostante e di continuare a beneficiare di quelli favorevoli.

Speculatori. Supponiamo che uno speculatore europeo sia convinto (o informato) che il dollaro si rafforzerà nei prossimi 3 mesi sull'euro ed è disposto a scommettere 100˙000 €. Può quindi acquistare al tasso di cambio spot corrente $\frac{€}{\$} = 1,34$ 134˙000 \$, metterli in banca ed attendere i prossimi 3 mesi. Se l'intuizione (o l'informazione) fosse giusta ed il tasso di cambio spot fra 3 mesi sarà $\frac{€}{\$} = 1$, i suoi 134˙000 \$ (trascurando gli interessi) saranno pari a 134˙000 €, con un guadagno assoluto di $134˙000 - 100˙000 = 34˙000$ €. Se viceversa la sua intuizione (o l'informazione) fosse sbagliata ed il cambio spot fra tre mesi fosse $\frac{€}{\$} = 1,4$, subirebbe una perdita pari a $100˙000 - \frac{134˙000}{1,4} = 4˙286$ €. Osserviamo subito che per realizzare tale speculazione occorre disporre di 100˙000 € subito.

Un'altra possibilità è fornita dall'uso di un contratto forward. Supponendo che il tasso di cambio forward a 3 mesi sia $\frac{€}{\$} = 1,32$, lo speculatore potrebbe, senza spese correnti, entrare in un contratto forward a 3 mesi per comprare dollari per un valore pari a $1,32 \times 100˙000 = 132˙000$ \$. Se il cambio spot fra 3 mesi sarà $\frac{€}{\$} = 1$, lo speculatore realizzerà un profitto pari a $132˙000 - 100˙000 = 32˙000$ €. Se invece il tasso di cambio sarà $\frac{€}{\$} = 1,4$, la sua perdita ammonterà a $100˙000 - \frac{132˙000}{1,4} = 5˙714$ €. Al contrario della prima strategia, cioè l'acquisto a pronti di USD, l'utilizzo di un contratto forward non comporta alcuna spesa iniziale.

Vediamo ora come può essere utilizzato un contratto di opzione per speculazione.

Supponiamo che lo speculatore voglia scommettere sul rialzo nei prossimi 3 mesi delle azioni Fiat, che ora valgono $S_0 = 5,75$ €, volendo investire 10˙000 €. Potrebbe quindi comprare $\frac{10˙000}{5,75} = 1739,1$ azioni e mantenerle per i prossimi 3 mesi. Se $S_3 = 4,5$ € la sua perdita sarà $10˙000 - 1739,1 \times 4,5 = 2˙173,9$ €, mentre se la sua intuizione (o informazione) fosse corretta e $S_3 = 7$, realizzerebbe un profitto pari a $2˙173,9$ €. Di nuovo, tale strategia necessita di un capitale iniziale di 10˙000 €.

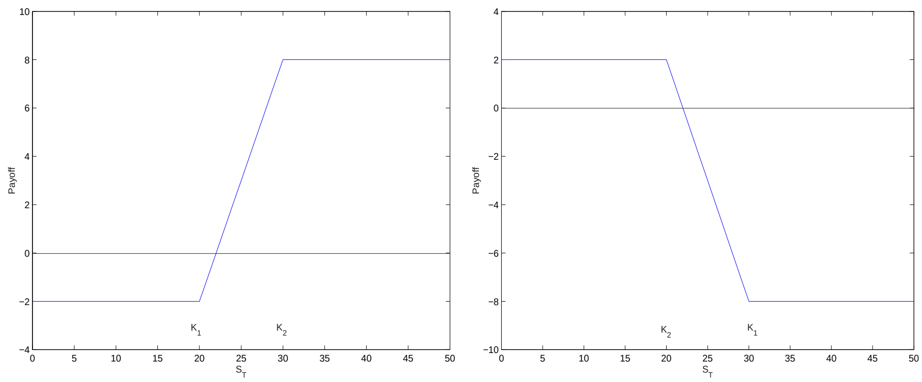


Figura 3.3: Payoffs delle strategie Bull Spread e Bear Spread.

Supponiamo invece che siano disponibili sul mercato delle opzioni dei contratti call europei su Fiat con scadenza 3 mesi, prezzo d'esercizio $K = 6$ € al prezzo unitario $c_0 = 0,254$ €. Lo speculatore potrebbe quindi acquistare $\frac{10'000}{0{,}245} = 39370$ opzioni call su Fiat. Se $S_3 = 4,5$ €, le opzioni non saranno esercitate, comportando per lo speculatore una perdita di 10'000 € (il prezzo iniziale delle opzioni). Se al contrario $S_3 = 7$ €, il suo profitto sarà $39370 \times (7-6) - 10'000 = 29370$ €. Tale strategia sarebbe quindi molto ($13,5$ volte) più redditizia dell'acquisto delle azioni, ma anche molto più rischiosa poichè se $S_T < K$ le opzioni non danno alcun profitto (il payoff in questo caso è infatti 0) al contrario del possesso delle azioni.

3.4.2 Alcune strategie

Combinando i 4 tipi base di contratti di opzione, long call, long put, short call e short put, su uno stesso sottostante e con varie scadenze, si possono ottenere dei contratti derivati più complessi, utilizzabili per differenti *strategie operative*.

Bull Spread, Bear Spread, Butterfly Spread. Il strategia *bull spread*, o spread al rialzo, è ottenuta combinando una posizione long call ed una short call su stesso sottostante, con strikes $K_1 < K_2$. Il payoff finale è

$$\max\{S_T - K_1, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\} - (c_0^{(2)} c_0^{(1)}).$$

il cui grafico è riportato in Figura (3.3).

Allo stesso modo si costruisce una posizione *bear spread*, o spread al ribasso, combinando una long call ed una short call, ma con strikes $K_1 > K_2$.

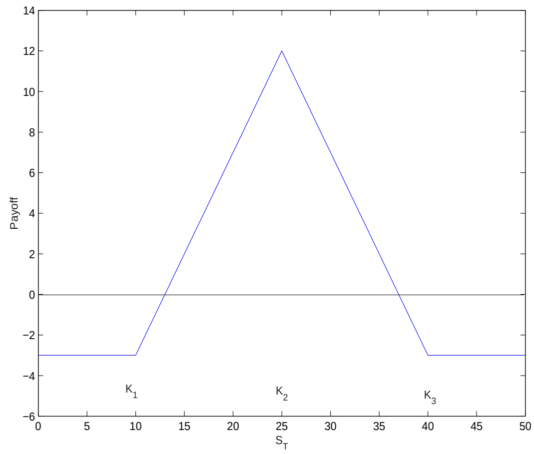


Figura 3.4: Payoff di una strategia Butterfly Spread.

La strategia *butterfly spread*, o spread a farfalla, si ottiene combinando tre contratti call: una long call con prezzo strike basso K_1, una long call con prezzo strike alto K_3 e due short call con prezzo strike intermedio K_2. Il grafico del payoff finale è riportato in Figura (3.4).

Gli spreads a farfalla consentono profitti limitati quando il valore del sottostante rimane vicino allo strike intermedio K_2.

In modo del tutto analogo si possono costruire delle strategie spread con le opzioni put.

Straddle. Long call + long put su stesso sottostante con stesso strike K e maturità T. Il valore finale è

$$c_T + p_T - (c_0 + p_0) = \max\{S_T - K, 0\} + \max\{K - S_T, 0\} - (c_0 + p_0)$$

(Fig. (**??**).

Con questo tipo di contratto si scommette su un (forte) rialzo o un (forte) ribasso dell'azione. Ci si aspetta dunque una grande *volatilità* del sottostante, ovvero una grande possibilità di variazione del valore del titolo e si gioca il cono di volatilità, sperando che S_T sia fuori da tale cono.

Strangle. E' molto simile allo straddle: Long call + long put su stesso sottostante ma con differenti strikes K_c e K_p. Il payoff netto risultante e' dunque

$$c_T + p_T - (c_0 + p_0) = \max\{S_T - K_c, 0\} + \max\{K_p - S_T, 0\} - (c_0 + p_0).$$

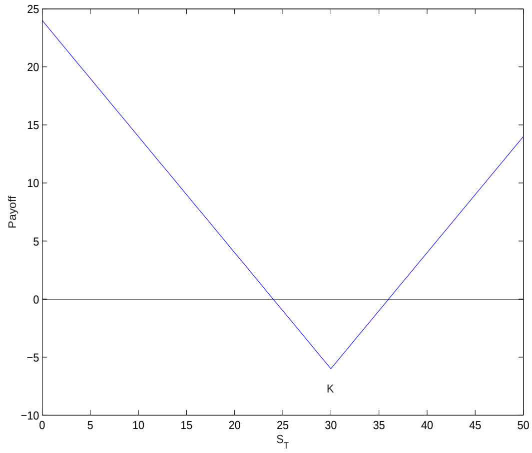


Figura 3.5: Payoff di una strategia Straddle.

Supponiamo che $K_p < K_c$: se $0 \leq S_T < K_p$ esercito la put, non esercito la call, pago i premi c_0 e p_0. Se $K_p \leq S_T \leq K_c$ non esercito nessuno dei due contratti e pago i premi. Se infine $S_T > K_c$ esercito la call ma non la put e pago i premi. Il payoff netto risultante è riportato in Figura (3.6).

Anche per una strategia *strangle* ci si aspetta una forte variazione del sottostante, sia in rialzo che in ribasso. Per avere un guadagno questa variazione deve però essere più grande che per una strategia *straddle*. D'altra parte, se il sottostante si troverà tra i prezzi strikes, la perdita che si subisce è minore che per uno *straddle*.

Strips e Straps. Le strategie *strips* si ottengono comprando una call e due put con stesso prezzo strike e stessa scadenza. Le *straps* sono invece ottenute comprando due call ed una put con stesso prezzo strike e stessa scadenza. I grafici del payoff finale sono riportati in Figura (**??**).

3.4.3 Effetto leva

Ci domandiamo: acquistare contratti di opzione è più o meno rischioso che acquistare le azioni sottostanti? Le opzioni sono in realtà molto più rischiose delle azioni, contrariamente a quanto possa sembrare, visto che si ha comunque il diritto ad una scelta nel caso in cui le cose si mettono male! Vediamo un esempio: al tempo $t = 0$ i due investitori A e B hanno nel proprio portafoglio 100 €ciascuno. Nel mercato sono quotate delle azioni, p.e. Telecom, ed i corrispondenti contratti di opzione call, con i seguenti dati: $S_0^{Tel} = 10$ €, $K = 11$ €, $T = 3/12$ (tre mesi) e $c_0 = 1$ €. Al tempo $t = 0$

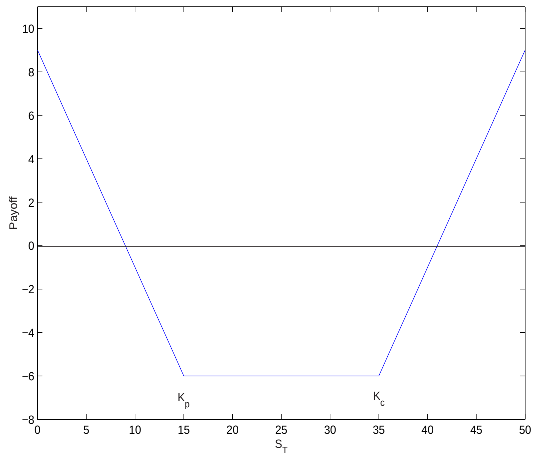


Figura 3.6: Payoff di una strategia Strangle.

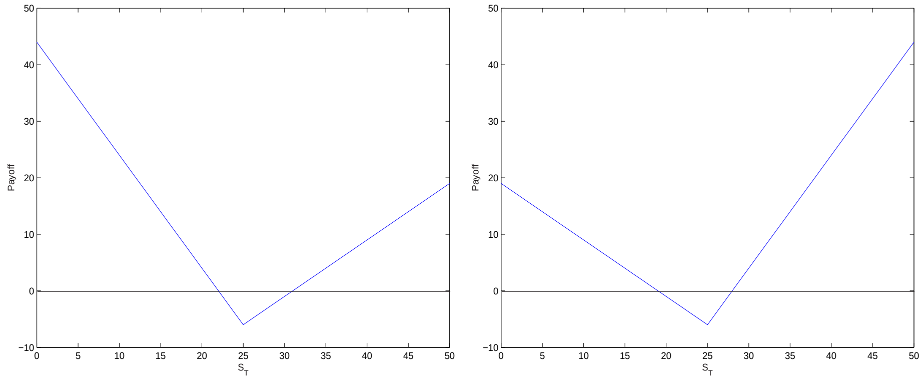


Figura 3.7: Payoffs delle strategie Strips (a sinistra) e Straps (a destra).

A decide di comprare 10 azioni mentre B compra 100 contatti call. Vediamo cosa può succedere alla scadenza T. Supponiamo che $S_T = 7$ €: dunque il portafoglio di A vale 70 €mentre quello di B vale 0 poichè il prezzo spot è al di sotto dello strike e quindi non si esercita il diritto di acquisto. Se invece $S_T = 14$ €, il portafoglio di A vale 140 €, con un rendimento assoluto pari a 40 €, mentre quello di B vale 300 €, con un rendimento assoluto pari a 200 €! La variabilità del rendimento dell'opzione è dunque molto maggiore: il rischio è determinato principalmente dal fatto che c'è una scadenza, mentre le azione possono essere tenute in portafoglio quanto si vuole. A questa maggiore rischiosità si contrappone il cosiddetto *effetto leva*: a parità di capitale investito, il guadagno ottenuto con l'opzione è in questo caso più che doppio!