Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO I - FEDERICO COGLITORE E LIVIA CORSI (21-9-05)

ESERCIZIO 1. Siano

$$\begin{aligned} u(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ v(t) &= (a(t), b(t), c(t)) \end{aligned}$$

due vettori in $\mathbb{R}^3$ che variano al variare del tempo $t \in I$ in maniera liscia (ad esempio vettori tangenti a due curve liscie). Dimostrare che il loro prodotto scalare

$$u(t) \cdot v(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione liscia. Dimostrare inoltre che per la derivata del prodotto scalare vale la seguente regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = \dot{u}(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot \dot{v}(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 2. Trovare una curva parametrizzata $\alpha(t)$ tale che

1. la sua traccia sia il cerchio unitario $x^2 + y^2 = 1$
2. α percorra il cerchio in senso orario
3. $\alpha(0) = (0, 1)$

ESERCIZIO 3. Una curva parametrizzata $\alpha(t)$ ha la proprietà che la sua derivata seconda $\ddot{\alpha}(t)$ è identicamente nulla. Cosa si può dire sulla curva α?

ESERCIZIO 4. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, con $\dot{\alpha}(t) \neq 0\ \forall t \in I$. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale ad $\dot{\alpha}(t)\ \forall t \in I$.

ESERCIZIO 5. Sia $v = (a, b, c)$ un vettore fissato e sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove $I = [0, 1]$. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che

$$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}(t) dt = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0)).$$