GE3 - Tutorato 2 - martedì 7 marzo 2006 d.C.
tutore Federico Coglitore

Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un sottoinsieme

1. Dimostrare che A è chiuso $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$.
2. Dimostrare che A è chiuso $\Longleftrightarrow \partial A \subseteq A$.
3. Dimostrare che A è chiuso $\Longleftrightarrow A = \partial A \sqcup \mathrm{Int}A$.
   (il simbolo $\sqcup$ indica l'unione disgiunta).
4. Dimostrare che $\bar{A} = A \cup \partial A$.
5. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua $\Longleftrightarrow f^{-1}(C)$ è chiuso in X $\forall C$ chiuso in Y.
6. Dimostrare che $\mathbb{R}^N$ contiene un sottoimsieme denso e numerabile.
7. Dimostrare che $A \subseteq X$ è denso se e solo se $\mathrm{Int}(X - A) = \emptyset$.
8. Dimostrare che $f : X \to Y$ è un omeomorfismo se e solo se f è continua, biunivoca e chiusa.
9. Dati $p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbb{R}$, costruire un insieme $A \subset \mathbb{R}$ t.c.
   $D(A) = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$.
10. Dimostrare che se X è discreto i singleton (i.e. insiemi con un solo elemento) sono una base per la topologia;
    dimostrare che se X è banale, $\{X\}$ è una base.