GE2, a.a. 2005/2006
Esercitazione n° 5

14 dicembre 2005

Fasci di coniche euclidee. Immersione di coniche nel piano proiettivo. Immagini di coniche mediante isometrie. Proiettività.

Formula per determinare il centro di una conica (per ellissi ed iperboli): sia

$$\Gamma\ : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0$$

l'equazione di una conica. La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che Γ possieda un centro di simmetria. Nel caso in cui il centro di simmetria coincida con l'origine $(0,0)$ si può verificare che l'equazione di Γ è priva dei termini di primo grado. Se invece il centro di simmetria è un punto $C = (u,v) \neq (0,0)$, per quanto appena osservato, la traslazione

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - u \\ y_2 = x_2 - v \end{cases}$$

che porta C nell'origine deve far sparire i termini di primo grado che compaiono nella equazione di Γ (quando la esprimiamo nelle variabili y_1, y_2). Sostituendo nella equazione data

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + u \\ x_2 = y_2 + v \end{cases}$$

e sviluppando i calcoli si ricavano le due condizioni

$$\begin{aligned} a_{01} + a_{11}u + a_{12}v = 0 \\ a_{02} + a_{12}u + a_{22}v = 0 \end{aligned}$$

che hanno come coefficienti la seconda e la terza riga della matrice A.
Queste ultime due equazioni permettono quindi di trovare il centro di simmetria semplicemente a partire dalla matrice della conica data.

Esercizio 1: Determinare il tipo delle seguenti coniche nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$

1. $2x_1^2 + 4x_2^2 - x_1 + 2x_2 = 0$
2. $x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1 + 2x_2 = 0$
3. $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 1 = 0$

ed eventualmente determinarne centro ed assi di simmetria.

Sol.:

1. La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Abbiamo $\det A = -3 \neq 0$, $\det A_0 = 8 > 0$, $\mathrm{Tr}(A_0) = 6 > 0$. Pertanto la conica è una ellisse non degenere e la relazione $\det A \cdot \mathrm{Tr}(A_0) < 0$ ci dice che tale ellisse è a punti reali.
   Il centro di simmetria si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 2u = 0 \\ 1 + 4v = 0 \end{cases}$$

   dunque $C = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. Gli assi di simmetria sono paralleli agli assi coordinati (perché $a_{12} = 0$) e passano per il centro. Quindi troviamo le due rette

$$x_1 = u = -\tfrac{1}{4}$$
$$x_2 = v = -\tfrac{1}{4}$$

2. Calcoliamo le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si trova $\det A = \frac{3}{4} \neq 0$, $\det A_0 = -2 < 0$, pertanto la conica è un'iperbole non degenere.
   Il suo centro di simmetria è dato da

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2v = 0 \\ 1 + 2u + v = 0 \end{cases}$$

   da cui $C = (-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4})$.

Per gli assi di simmetria dato che $a_{12} = 2 \neq 0$ dobbiamo ricordare che essi sono paralleli agli autovettori della matrice A_0 e passano per il centro.
Autovalori di A_0:

$$\det(A_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0$$

da cui $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$.
Le equazioni degli assi sono dunque

$$\begin{aligned} -\lambda_1 x_1 + 2x_2 + c_1 = 0 \\ -\lambda_2 x_1 + 2x_2 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

dove c_1 e c_2 soddisfano le relazioni ulteriori

$$\begin{aligned} -\lambda_1 u + 2v + c_1 = 0 \\ -\lambda_2 u + 2v + c_2 = 0 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori trovati si ottengono le due rette

$$\begin{aligned} -\frac{1+\sqrt{17}}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{5-3\sqrt{17}}{16} = 0 \\ -\frac{1-\sqrt{17}}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{5+3\sqrt{17}}{16} = 0 \end{aligned}$$

3. Le matrici relative alla conica sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det A = \det A_0 = \frac{15}{16} > 0$, $\mathrm{Tr}(A_0) = 2 > 0$. Si tratta quindi di un'ellisse a punti immaginari. Per questa conica non determiniamo centro ed assi di simmetria poiché sul piano reale risulta essere vuota.

Esercizio 2: Studiare la conica

$$2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 = 0$$

e ridurla in forma canonica.

Sol.: La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si trova $\det A = 0$, $\det A_0 = -6 < 0$, dunque la conica è un'iperbole degenere (ossia si spezza in due rette reali incidenti).

Per ridurla in forma canonica diagonalizziamo la matrice A_0 in modo da far sparire il termine misto x_1x_2. Calcoliamo gli autovalori di A_0:

$$\det(A_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

da cui $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$.

Gli autospazi sono dunque

$$V_{\lambda_1} = \{-x_1 - 2x_2 = 0\} =< v_1 > \quad v_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$V_{\lambda_2} = \{4x_1 - 2x_2 = 0\} =< v_2 > \quad v_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

Si può verificare che i vettori v_1, v_2 formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, dunque la matrice

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale che diagonalizza A_0. Se applichiamo dunque la trasformazione

$$\begin{cases} x_1 = (2y_1 + y_2)/\sqrt{5} \\ x_2 = (-y_1 + 2y_2)/\sqrt{5} \end{cases}$$

l'equazione della conica nelle nuove variabili y_1, y_2 non conterrà il termine misto. Sostituendo e svolgendo i calcoli si vede che la nuova equazione diventa

$$15y_1^2 - 10y_2^2 = 5(3y_1^2 - 2y_2^2) = 0$$

ed è quindi già ridotta in forma canonica. Non dobbiamo quindi effettuare la trasformazione che porta il centro nell'origine perché nell'equazione non compaiono termini di primo grado.

Esercizio 3: Si determini il tipo delle coniche nella famiglia

$$\Gamma_t : tx_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 2tx_2 = 0$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$ e se ne studino i punti impropri.

Sol.: Iniziamo dallo studio delle coniche della famiglia. Consideriamo le matrici associate alla conica Γ_t:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 1 & t & 0 \\ t & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{0t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si trova $\det A_t = -2 - t^3$, $\det A_{0t} = 2t$, $\mathrm{Tr}(A_{0t}) = 2 + t$. L'unico valore per cui A_t è degenere è $t = -\sqrt[3]{2}$ per il quale $\det A_{0t} < 0$. Si tratta quindi di una iperbole degenere (due rette reali incidenti).

Un altro valore "critico" è $t = 0$ in cui si ha $\det A_{0t} = 0$. In questo caso A_t ha rango tre e Γ_t è una parabola non degenere.

Vediamo cosa succede per gli altri valori di t.

Se $t < -\sqrt[3]{2}$ abbiamo $\det A_{0t} < 0$ dunque delle iperboli non degeneri. Lo stesso vale per $-\sqrt[3]{2} < t < 0$.

Per $t > 0$ invece $\det A_{0t}$ e $\mathrm{Tr}(A_{0t})$ diventano positivi, mentre $\det A_t$ è negativo. Abbiamo quindi delle ellissi a punti reali.

Studiamo ora i punti impropri delle coniche. Essi si ottengono immergendo le comniche nel piano proiettivo e considerando l'intersezione con la retta $x_0 = 0$. Per trovarli moltiplichiamo i monomi dell'equazione di Γ_t per opportune potenze della variabile x_0 in modo da rendere l'equazione omogenea di secondo grado e poi intersecando con $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} tx_1^2 + 2x_2^2 + 2x_0x_1 + 2tx_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} tx_1^2 + 2x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Se $t > 0$ (il caso delle ellissi) questo sistema non ammette soluzioni reali. Quando $t = 0$ (caso della parabola) si ha l'unico punto reale $[0 : 1 : 0]$, mentre quando $t < 0$ (caso delle iperboli degeneri e non) troviamo i due punti reali $[0 : \sqrt{-t/2} : 1]$, $[0 : -\sqrt{-t/2} : 1]$.

Nota: Si osservi che lo studio dei punti impropri di una conica permette di determinare se essa è un'ellisse, un'iperbole o una parabola a seconda che essa abbia rispettivamente due punti impropri immaginari, due punti impropri reali o un solo punto improprio reale. Tale studio però non permette di distinguere se la conica è segenere o non degenere, come si è visto nell'esercizio precedente per l'iperbole degenere.

Esercizio 4: Si studino i punti impropri del fascio di coniche

$$(1-t)x_1^2 + (1-t)x_2^2 - 2(1+t)x_1x_2 - 4\sqrt{2}(x_1 - x_2) = 0$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Sol.: Come nell'esercizio precedente si tratta di immergere le coniche nel piano proiettivo e intersecarne l'immagine con la retta $x_0 = 0$. Dunque

$$\begin{cases} (1-t)x_1^2 + (1-t)x_2^2 - 2(1+t)x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_0(x_1 - x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

implica

$$\begin{cases}(1-t)x_1^2+(1-t)x_2^2-2(1+t)x_1x_2=0\\ x_0=0\end{cases}$$

Per $t\neq 1$ la prima equazione può essere risolta rispetto alla variabile x_2 ed ha discriminante

$$\Delta/4=x_1^2[(1+t)^2-(1-t)^2]=4x_1^2t.$$

Il segno di Δ dipende quindi solo dal segno di t.

Per $t>0$ $t\neq 1$ il sistema ammette due soluzioni reali corrispondenti ai punti $[0:1:\frac{1+t+\sqrt{4t}}{1-t}]$ e $[0:1:\frac{1+t-\sqrt{4t}}{1-t}]$. Le coniche sono dunque delle iperboli.

Per $t=0$ esiste un'unica soluzione $[0:1:1]$ corrispondente al caso di una parabola.

Per $t<0$ non ci sono soluzioni reali. Pertanto le coniche sono delle ellissi.

Nel caso $t=1$ invece la conica data si riduce a

$$-4[x_1x_2+\sqrt{2}(x_1-x_2)]=0$$

mentre il sistema che individua i punti impropri diventa

$$\begin{cases}-4x_1x_2=0\\ x_0=0\end{cases}$$

che determina i due punti $[0:1:0]$ e $[0:0:1]$. La conica è quindi ancora un'iperbole.

Esercizio 5: Siano date l'iperbole

$$\Gamma\ :x_1^2-x_2^2=1$$

e la rotazione f di angolo $\frac{\pi}{4}$ di centro $P=(1,1)$. Si determinino l'equazione di $f(\Gamma\ )$, il suo centro di simmetria ed i suoi asintoti.

Sol.: Anzitutto determiniamo la rotazione f. Abbiamo

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

Sappiamo che $\theta=\pi/4$ e che il centro di rotazione è $P=(1,1)$ da cui sostituendo

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Pertanto

$$f:\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_2+1\\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2+1-\sqrt{2}\end{cases}$$

Per trovare l'equazione di $f(\Gamma\ )$ basta esprimere le coordinate x_1, x_2 in termini delle nuove coordinate y_1, y_2 e sostituire nell'equazione data. Per far ciò dobbiamo trovare la trasformazione inversa di f che risulta essere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - b_1 \\ y_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - (\sqrt{2}-1) \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= [\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - (\sqrt{2}-1)]^2 - [-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - 1]^2 - 1 \\ &= [\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + (\sqrt{2}-1)^2 + y_1y_2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(y_1+y_2)] \\ &- [\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 1 - y_1y_2 + \sqrt{2}(y_1-y_2)] - 1 \\ &= 2y_1y_2 - 2y_1 + 2(\sqrt{2}-1)y_2 + 1 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Il centro C' e gli asintoti della nuova iperbole

$$f(\Gamma\ ) : 2y_1y_2 - 2y_1 + 2(\sqrt{2}-1)y_2 + 1 - 2\sqrt{2} = 0$$

sono le immagini del centro e degli asintoti di Γ tramite la rotazione f.

Γ ha centro di simmetria $C = O = (0,0)$ dunque $C' = f(0,0) = (b_1, b_2) = (1, 1-\sqrt{2})$.

Per quanto riguarda gli asintoti ricordiamo che per un'iperbole essi sono paralleli alle rette ottenute uguagliando a 0 la parte di secondo grado dell'equazione che definisce l'iperbole (la quale si spezza sempre nel prodotto di due polinomi di primo grado) e che devono passare, come gli assi, per il centro di simmetria.

Poiché nel caso di Γ tale centro è l'origine, basta solo considerare l'equazione

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

che fornisce le sue rette

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{gathered}$$

Le immagini delle due rette mediante la trasformazione f sono dunque

$$\begin{gathered} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 - \sqrt{2} \end{gathered}$$

Esercizio 6: Si trovino i punti fissi della proiettività

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_1 : x_0 + x_1 + x_2 : x_1 + x_2]$$

Sol.: Poiché nel piano proiettivo i punti sono individuati da terne di coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2]$, data una proiettività i suoi punti fissi corrispondono alle terne di coordinate le cui immagini sono multipli non nulli delle terne di partenza. Questi punti saranno dunque gli autovettori della matrice associata alla proiettività se la guardiamo come una trasformazione in $\mathbb{R}^3$.

La matrice associata ad f è data da

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det(M_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1, 1 \pm \sqrt{2}$$

I tre autospazi corrispondenti V_λ risultano essere quindi (verificare!!)

$$V_1 = < (1, 0, -1) >, \; V_{1+\sqrt{2}} = < (1, \sqrt{2}, 1) >, \; V_{1-\sqrt{2}} = < (1, -\sqrt{2}, 1) >$$

da cui i tre punti fissi

$$P_1 = [1 : 0 : -1], \; P_2 = [1 : \sqrt{2} : 1], \; P_3 = [1 : -\sqrt{2} : 1].$$

Esercizio 7: Si trovino i punti fissi della proiettività

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [2x_0 : 3x_0 + x_2 : x_1]$$

Sol.: Come nell'esercizio precedente si tratta di determinare gli autovettori della matrice associata ad f:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2, \pm 1$$

Per gli autospazi V_λ si ricava dunque

$$V_2 = < (1, 2, 1) >, \; V_1 = < (0, 1, 1) >, \; V_{-1} = < (0, 1, -1) >$$

da cui i tre punti fissi

$$P_1 = [1 : 2 : 1], \; P_2 = [0 : 1 : 1], \; P_3 = [0 : 1 : -1].$$