Urti perfettamente elastici

Si considerino due punti materiali di massa m_1 e m_2 che si muovono senza attrito lungo l'asse x con velocità $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$, rispettivamente. Ad un certo istante t i due punti urtano elasitcamente. Si determinino le velocità $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$ dopo l'urto. Si discuta il moto dei due punti materiali al variare dei parametri m_1, m_2, $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$.

Negli urti perfettamente elastici si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica K_c del sistema.

Conservazione quantità di moto

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_f \tag{1}$$

poiché il moto è unidimensionale può essere scritta

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{2}$$

Conservazione energia cinetica

$$K_{ci} = K_{cf} \tag{3}$$

ovvero

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{4}$$

Queste due equazioni insieme formano un sistema di due equazioni in due incognite, che può essere risolto come segue: si consideri innanzitutto l'equazione 2 che può essere riscritta come

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}) \tag{5}$$

avendo portato tutto ciò che riguarda il primo punto materiale al primo membro e tutto ciò che riguarda il secondo punto materiale al secondo membro e avendo portato le masse a fattor comune. Si prosegue quindi con l'equazione 4

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \tag{6}$$

il primo passo consiste nel portare a primo membro tutti i termini relativi al primo punti materiale e al secondo membro tutti i termini relativi al seconso punto materiale

$$m_1 v_{1i}^2 - m_1 v_{1f}^2 = m_2 v_{2f}^2 - m_2 v_{2i}^2 \tag{7}$$

si portano a fattor comune le masse

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \tag{8}$$

Si riconosce che i termini tra parentesi sono dei binomi notevoli (differenza di due quadrati), e quindi possono essere scomposti come

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}) \tag{9}$$

Sostituendo i primi due termini al secondo membro tramite la 5, si ottiene

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{2i} + v_{2f}) \tag{10}$$

quindi semplificando

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \tag{11}$$

separando di nuovo i termini prima e dopo l'urto

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \tag{12}$$

che può essere riscritta come

$$u_i = -u_f \tag{13}$$

dove si posto

$$u_i = v_{1i} - v_{2i} \tag{14}$$

velocità relativa prima dell'urto e

$$u_f = v_{1f} - v_{2f} \tag{15}$$

Quindi, la relazione 13 può essere utilizzata al posto della 4 insieme alla 2, negli urti elastici unidimesionali, per rislovere il problema delgi urti. Ora, si possono quindi facilmente ricavare le velocità dei punti materiali dopo l'urto

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{16}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \tag{17}$$

si ricava, ad esempio, la velocità del primo punto dopo l'urto dalla seconda equazione

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{18}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} \tag{19}$$

che sostituita nella prima da

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{2f} - m_1 v_{1i} + m_1 v_{2i} + m_2 v_{2f} \tag{20}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} \tag{21}$$

quindi

$$(m_1 + m_2) v_{2f} = 2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i} \tag{22}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} \tag{23}$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{(m_1 + m_2)} \tag{24}$$

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} \tag{25}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{(m_1 + m_2)} \tag{26}$$

$$v_{1f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i} - m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i} + m_1 v_{2i} + m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2)} \tag{27}$$

infine

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{(m_1 + m_2)} \tag{28}$$

$$v_{1f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2)} \tag{29}$$

Se, ad esempio, le masse sono uguali si ha

$$v_{2f} = v_{1i} \tag{30}$$

$$v_{1f} = v_{2i} \tag{31}$$

le velocità vengono scambiate; se il secondo punto prima dell'urto è fermo si ha

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{(m_1 + m_2)} \tag{32}$$

$$v_{1f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{1i}}{(m_1 + m_2)} \tag{33}$$

e in particolare se, in quest'ultimo caso le due masse sono uguali

$$v_{2f} = v_{1i} \tag{34}$$

$$v_{1f} = 0 \tag{35}$$

il secondo punto procederà dopo l'urto con la stessa veloctià del primo prima dell'urto, mentre il primo si fermerà.

Urti perfettamente anelastici

Negli urti perfettamente anelastici, i due corpi che urtano rimangono icollati tra loro (esempio, un proiettile che si conficca in un sacco di sabbia): si conserva la quantità di moto del sistema, ma non si conserva l'energia cinetica K_c (l'energia viene dissipata in altre forme di energia, esempio deformazione o calore).

Conservazione quantità di moto

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_f \tag{36}$$

poiché il moto è unidimensionale può essere scritta

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \tag{37}$$

poiché, dopo l'urto, i due corpi procedono con la stessa velocità.

Questa equazione è sufficiente a risolvere il problema; la velocità finale del sistema quindi è:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{38}$$