AM3 -SOLUZIONI 2
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

17 marzo 2006

Soluzione 1 .

(a) Calcoliamo le matrici jacobiane di f e g:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} & e^{x^2} \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ 8x & e^y & 0 \\ -1 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

(b) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'espressione analitica di h si ottiene sostituendo ad x, y, z nell'espressione di g, rispettivamente, le componenti di f; si ottiene:

$$h(x,y) = y^2\cos(xy)e^{2x^2}\mathbf{i} + (4y^2e^{2x^2} + e^{\sin(x+y)})\mathbf{j} + [(\cos(xy))^3 - ye^{x^2}]\mathbf{k}.$$

(c) Occorre calcolare $\nabla f|_{(0,\pi)}$ e $\nabla g|_{(f(0,\pi))}$.
Si ha $f(0,\pi) = (\pi, 0, 1)$:

$$\nabla f|_{(0,\pi)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g|_{(\pi,0,1)} = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 & \pi^2 \\ 8\pi & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi per il teorema di composizione

$$\nabla h|_{(0,\pi)} = \nabla g|_{(\pi,0,1)} \cdot \nabla f|_{(0,\pi)} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -1 & 8\pi - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 2 .
Vogliamo far vedere che vale il teorema delle funzioni implicite nel punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Risulta:

$$F(0, -1) = 0$$

e

$$F_y(0, -1) = (-e^{x-y} + 2y)\Big|_{(0,-1)} = -2 - e \neq 0.$$

Le ipotesi del teorema locale delle funzioni implicite sono verificate, quindi esiste un intorno di $x_0 = 0$ in cui è definita un'unica funzione $y = g(x)$ per cui $F(x, g(x)) = 0$.
Osserviamo ora che, per il teorema sulla regolarità, la g è una funzione infinitamente differenziabile quindi ha senso derivare per trovare i punti stazionari.
Scriviamo esplicitamente $F(x, g(x))$:

$$F(x, g(x)) = e^{x-g(x)} + x^2 + g^2(x) - e(x + 1) - 1 = 0.$$

Derivo rispetto ad x:

$$F_x(x, g(x)) = [1 - g'(x)]e^{x-g(x)} + 2x + 2g(x)g'(x) - e = 0.$$

Ricavo $g'(x)$ dall'equazione scritta sopra

$$g'(x) = \frac{e - 2x - e^{x-g(x)}}{2g(x) - e^{x-g(x)}}.$$

Calcolando $g'(x)$ nel punto $(0, -1)$, otteniamo

$$g'(x)\Big|_{(0,-1)} = 0$$

quindi effettivamente $(0,-1)$ è un punto stazionario per la $g(x)$.
Ora dobbiamo controllare la natura di tale punto stazionario calcolando la derivata seconda.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{[-2-(1-g'(x))e^{x-g(x)}][2g(x)-e^{x-g(x)}]}{(2g(x)-e^{x-g(x)})^2} + \\ &- \frac{[2g'(x)-(1-g'(x))e^{x-g(x)}][e-2x-e^{x-g(x)}]}{(2g(x)-e^{x-g(x)})^2}. \end{aligned}$$

Calcolando $g''(x)$ nel punto $(0,-1)$ e ricordando che

$$g'(x)\big|_{(0,-1)} = 0$$

otteniamo

$$g''(x)\big|_{(0,-1)} > 0$$

quindi $(0,-1)$ è un punto di minimo locale per $g(x)$.

Soluzione 3 .
Occorre risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene $x^3+y^3=0$ cioè $x=-y$. Sostituendo in una delle equazioni si trovano i punti critici

$$(0,0)\,, \quad (\sqrt{2},-\sqrt{2})\,, \quad (\sqrt{2},-\sqrt{2})\,.$$

Per determinare la natura dei punti critici si prova a calcolare la matrice hessiana in tali punti. Osserviamo che la funzione è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$, infatti $f(x, y) = f(y, x)$, quindi i punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ hanno la stessa natura. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4 \end{cases}$$

quindi

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4\,. \end{pmatrix}$$

In particolare

$$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det H(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 384 > 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20 > 0\,.$$

I punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sono di minimo locale. In $(0, 0)$ si ha invece

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det(0, 0) = 0$, il test dell'hessiana non da indicazioni riguardo la natura del punto. Un possibile modo di procedere è esaminare direttamente il segno di

$$f(x, y) - f(0, 0)\,.$$

Poichè $f(0, 0) = 2$ si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2\,.$$

Sulla retta $y = x$ si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = 2x^4 \geq 0\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

quindi su questa retta l'origine è un punto di minimo. Sulla retta $y = -x$ si ha invece

$$f(x, y) - f(0, 0) = 2x^4 - 8x^2 \leq 0\,, \qquad |x| \leq 2\,,$$

per cui su tale retta l'origine è un punto di massimo. Quindi possiamo concludere che $(0, 0)$ è una sella.