AM3 - Tutorato I
Lemma delle contrazioni e differenziabilità in $\mathbb{R}^n$

Filippo Cavallari e Fabio Pusateri

Lunedì 6 marzo 2006

Esercizio 1. Si consideri il seguente funzionale su $C([0,1])$:

$$F : f \longrightarrow \rho(x) = 1 + \int_0^1 e^{-xy} y f(y)\ dy\ ;$$

ammette un punto fisso? se sì, é unico?

Esercizio 2. Sia $X = \{f \in C([0,1]) \ : \|f\|_\infty \leq 1\}$; si consideri il seguente funzionale

$$\begin{aligned} F_n \quad : \quad & X \longrightarrow C([0,1]) \\ & f \longmapsto \frac{1}{2} + C_n \int_0^x f^n(y) dy\ ; \end{aligned}$$

- per quali valori di C_n, l'immagine di F_n é contenuta in X ?
- per quali valori di C_n si ha che F_n é una contrazione ?
- nel caso $n = 1$ e C_1 tale da soddisfare le condizioni trovate nei punti precedenti qual é il punto fisso? e per $n = 2$? ... e per $n \in \mathbb{N}$ qualunque?

Esercizio 3. Sia X il sottospazio di $(l_2, \|\cdot\|_{l_2})$ di successioni aventi norma minore di $a > 0$ (ricordiamo che $l_2 = \left\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ : \|\{x_n\}\|_{l_2}^2 \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ per i pochi che non lo sapessero) ; fissata una qualsiasi successione $x_n \in l_2$ con norma minore di $b > 0$ e sia c un parametro reale, si consideri il seguente funzionale:

$$\begin{aligned} L = L_{\{x_n\}} : \quad & X \quad \longrightarrow l_2 \\ & \{y_n\} \quad \longmapsto \{c\sqrt{x_n y_n}\}\ ; \end{aligned}$$

Allora:

- verificare anzitutto se L é ben definito?
- per quali valori di c lo spazio d'arrivo é ancora X ?
- per quali valori di c si tratta di una contrazione?
- esistono punti fissi?

Esercizio 4. Sia

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (\sin(xy) + e^{xy^2} + y\cos z) \end{array}$$

- calcolare le derivate parziali;
- usando la definizione mostrare che f é differenziabile in 0;
- sia

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \tanh t + \sqrt{1+t^2} \end{array}$$

  e si definisca $F(t) = f\left(g(t), 1 - g^2(t), 1 + g(t)\right)$; calcore $F'(0)$.

Esercizio 5. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ed $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ calcolare

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(x, h(x,z), z\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z} f\left(x, h(x,z), z\right)$$

Esercizio 6. Considerare la funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x_1 x_2 \ldots x_n|^\alpha}{|x|^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

trovare condizioni necessari e sufficienti affinché

- f sia continua;
- f abbia derivate direzionali nell'origine;
- f sia diferenziabile nell'origine;
- f sia $C^1(\{0\})$.