AM3 -SOLUZIONI 5
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

4 maggio 2006

1. (a). $y = 0$ è un integrale particolare. Si scriva l'equazione nella forma integrale
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}\, dt.$$
Integrando si ottiene
$$\log|y| = \frac{1}{2}\log(1+e^{2t}) + cost$$
da cui segue che $|y| = k\sqrt{1+e^{2t}}$, k costante.

(b). $y = 0$ è un integrale particolare. Deve essere $x \neq \pm 1$ affinché la funzione in x sia continua. Si scriva l'equazione nella forma integrale
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx.$$
Integrando si ottiene
$$\log|y| = \log|x-1| + \log|x+1| + cost$$
da cui segue che $|y| = k|x^2-1|$, k costante.

(c). Sia $y \neq x$. Ponendo $z = \frac{y}{x}$ con $x \neq 0$ si ha
$$y' = z'(x)x + z(x).$$
L'equazione integrale per z è:
$$\int \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2}\right) dz = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Integrando si ottiene

$$\arctan z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log|x| + cost.$$

Tornando alla variabile y si ottiene l'integrale generale in forma implicita:

$$\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = \log|x| + cost$$

cioè

$$\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = cost\,.$$

(d). Per $t \neq 0$ l'equazione è a variabili separabili.

$$\int(1+y^2)dy = 3\int\frac{1}{t}dt.$$

Integrando si ottiene

$$y + \frac{y^2}{3} = 3\log|t| + c$$

che è l'integrale generale.

2. (a). Il polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

ha radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. La soluzione generale è:

$$u(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

(b). Il polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

ha radice $\lambda = 1$. La soluzione generale è:

$$u(t) = c_1e^t + c_2te^t.$$

(c). Il polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$$

ha una radice reale $\lambda_1 = 0$ e due radici complesse coniugate $\lambda_2 = 1 + i$ e $\lambda_3 = 1 - i$. La soluzione generale è:

$$u(t) = c_1 + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t.$$