II Esonero di AM3 - 8/6/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
L'equazione puó essere risolta per variabili separabili. Vale che:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{y(s)} y(s)\dot{y}(s) ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^s \sin s ds.$$

La primitiva di $e^{y(s)}y(s)\dot{y}(s)$ è $e^{y(s)}\left(y(s)-1\right)$. Integrando per parti si calcola anche la primitiva di $e^s \sin s$ che vale $\frac{1}{2}e^s(\sin s - \cos s)$. Abbiamo quindi che:

$$e^{y(x)}\left(y(x)-1\right) = g(x) := \frac{e^x(\sin x - \cos x) - e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

Definiamo $F(s) = e^s(s-1)$. La funzione ha derivata se^s e risulta quindi essere decrecente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, +\infty)$. In particolare, la funzione $F(s)$ ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$ pari a -1 assunto in $s = 0$.
In generale $F(s)$ non è invertibile. Sia $G(s) : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$ l'inversa di $F(s)$ ristretta a $(0, +\infty)$. Allora la soluzione $y(x)$ cercata sará della forma:

$$y(x) = G\left(\frac{e^x(\sin x - \cos x) - e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\right),$$

localmente in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$. Supponiamo ora di aver esteso $y(x)$ al proprio intervallo massimale I di esistenza. Si dovrá avere sicuramente $I \subset I_0 = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ poiché $g(x)$ assume valori minori di -1 sugli estremi di I_0 e non esiste nessun valore y tale che $F(y) < -1$.

Esercizio 2
Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ ha due radici reali distinti 1 e 2. Lo spazio delle soluzioni omogenee sará quindi generato da e^x, e^{2x}.
Cerchiamo ora una soluzione particolare $\bar{y}(x) = c(x)e^x$. La funzione $c(x)$ dovrá soddisfare $(\dot{c} - c)' = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Allora

$$\dot{c}(x) - c(x) = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\ln(1 + e^{-x}).$$

Dalla formula generale risolutiva per le equazioni del primo ordine abbiamo:

$$c(x) = -e^x \int e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) dx = (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x}) - 1.$$

La soluzione generale dell'equazione sará della forma:

$$y(x) = \bar{y}(x) + c_1 e^x + c_2 e^{2x} = e^x(e^x + 1)\ln(1 + e^{-x}) + c_1 e^x + c_2 e^{2x},$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni iniziali dell'esercizio, otteniamo

$$c_1 + c_2 = 0\,, \quad c_1 + 2c_2 = 1,$$

la cui soluzione è data da $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. La funzione $y(x)$ cercata è quindi:

$$y(x) = e^x(e^x + 1)\ln(1 + e^{-x}) - e^x + e^{2x}.$$

Esercizio 3
Una parametrizzazione della superficie Σ -grafico su K della funzione $z = xy$- è data dalla mappa $\varphi : (x, y) \in K \to (x, y, xy) \in \Sigma$. Abbiamo quindi che $\varphi_x = (1, 0, y)$, $\varphi_y = (0, 1, x)$ e $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-y, -x, 1)$. Dalla definizione di integrale superficiale, otteniamo che:

$$\int_\Sigma z d\sigma = \int_K xy\sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

In coordinate polari, $K = \{(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) : \rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]\}$ poiché la condizione $0 \le y \le \sqrt{3}x$ si traduce in θ come: $0 \le \tan\theta \le \sqrt{3}$. Allora:

$$\int_\Sigma z d\sigma = \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\sqrt{1 + \rho^2} d\rho\right) = \frac{3}{16}\int_0^1 \rho\sqrt{1 + \rho} d\rho = \frac{1 + \sqrt{2}}{20}.$$

Esercizio 4
Il dominio D é y-normale: $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ \sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$. Allora dal Teorema di Fubini:

$$\int_D y^3 e^x dxdy = \int_0^1 dx e^x \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y^3 dy = \int_0^1 (\frac{15}{4} - \frac{3}{2}x^2)e^x = \frac{3}{4}(3e - 1).$$

Esercizio 5
a) La forma è chiusa. Sia $F = (F_1, F_2, F_3) := (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z)$. Abbiamo infatti che:

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2 = 4xyz,\ \partial_z F_1 = \partial_x F_3 = 2xy^2,\ \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = 2x^2y.$$

b) Poiché ω è definita su $\mathbb{R}^3$, che è un insieme stellato, la chiusura di ω ne implica anche l'esattezza. Una primitiva di ω è data da:

$$f(x, y, z) = x^2y^2z - z^2.$$

Sia γ il segmento che congiunge l'origine $(0, 0, 0)$ con il punto $(1, 1, 2)$. Allora:

$$\int_\gamma \omega = f(1, 1, 2) - f(0, 0, 0) = -2.$$

Esercizio 6
La frontiera di A è regolare a tratti ed è costituita dall'unione di due curve regolari γ_1, γ_2 della forma:

$\gamma_1(t) = (t, 0),\ t \in [1, 3]$ segmento che unisce $(1, 0)$ con $(3, 0)$
$\gamma_2(t) = (2 + \cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$ semicirconferenza superiore centrata nel punto $(2, 0)$.

Allora i versori tangenti sono $\tau_1(t) = (1, 0)$, $\tau_2(t) = (-\sin t, \cos t)$ e quindi i versori normali esterni risultano essere $\nu_1(t) = (0, -1)$, $\nu_2(t) = (\cos t, \sin t)$. Dalla definizione di integrale curvilineo abbiamo che:

$$\int_{\partial A} f \cdot n ds = -\int_1^3 t dt + \int_0^\pi [(1 + 2\sin t + \sin t \cos t)\cos t + (2 + \cos t)\sin t]\, dt = \frac{2}{3}.$$

Calcoliamo ora:

$$\int_A \text{div } f dxdy = \int_A y dy = (\int_0^\pi \sin\theta d\theta)(\int_0^1 \rho^2 d\rho) = \frac{2}{3}.$$

Il Teorema della divergenza è quindi verificato:

$$\int_{\partial A} f \cdot n ds = \int_A \text{div } f dxdy.$$