# Recupero I Esonero di AM3 - 29/4/2006

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

**Esercizio** 1
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione definita nel seguente modo:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y + z^2 & \text{se } x \neq 0 \\ \sin y + z^3 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e sia $h(s,t) = \big(\cos(s^2) + \sin t, e^s + s\ln(1+t)\big)$.
(a) Determinare la continuitá di $f$ in $(0,0,0)$.
(b) Calcolare le derivate parziali di $f$ in $(0,0,0)$.
(c) Determinare la differenziabilitá di $f$ in $(0,0,0)$.
(d) Calcolare lo Jacobiano di $g(x,y,z) = h\,(f(x,y,z), x+y)$ in $(0,0,0)$ giustificando la risposta.

**Esercizio** 2
Sai $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$F(x,y,z) = \cos x \cos y e^z - \cos(z^2).$$

(a) Rappresentare come grafico di un'opportuna funzione $g$ l'insieme $\{F = 0\}$ localmente in $p_0 = (0,0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di $p_0$ per cui tale rappresentazione valga.
(b) Trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione $g$ rispetto all'origine.

**Esercizio** 3
(a) Calcolare i punti ed i valori di massimo/minimo assoluto in $A = \{(x,y,z) : 0 \leq z = 1 - x^2 - y^2\}$ della funzione $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
(b) Calcolare i punti ed i valori di massimo/minimo assoluto in $B = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ della medesima funzione $f$ (facoltativo).

**Esercizio** 4
Sia $x_n$, $n \geq 1$, la successione di componenti $x_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(2 + \frac{1}{kn}\right)$.
(a) Fissato $n$, discutere l'appartenenza di $x_n$ agli spazi $l^1$ e $l^2$.
(b) Sia $x$ la successione di componenti $x^{(k)} = \frac{\ln 2}{\sqrt{k}}$. Fissato $n$, discutere l'appartenenza di $x_n - x$ agli spazi $l^1$ e $l^2$.
(c) Determinare l'enventuale convergenza di $x_n - x$ a zero in $l^1$ e $l^2$.