Appello C di AM3 - 12/1/2007 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Calcoliamo il gradiente di $f(x,y,z)$:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(1+y^2-x+xy, -1-x^2-y-yx\right)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Tale vettore si annulla solo quando $y^2-x^2=y+x$ e $1+y^2-x+xy=0$. Abbiamo quindi una soluzione che corrisponde al caso $y+x=0$: $P=(1,-1)$. Il caso $y-x=1$ non produce invece punti critici. Il punto P è interno a D ed è quindi un punto critico interno di $f(x,y)$ ove $f(P)=\sqrt{3}$.
Discutiamo ora i punti critici vincolati di $f(x,y)$ su $\partial D=\{x^2+y^2=4\}$. Poiché $f(x,y)=\frac{1+x-y}{\sqrt{5}}$ su ∂D, basta studiare equivalentemente la funzione $g(x,y)=\frac{1+x-y}{\sqrt{5}}$. Per il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, in tali punti deve valere $(1,-1)=\lambda(x,y)$. Poiché $\lambda\neq 0$, si ha che gli unici punti critici vincolati di $g(x,y)$ sono della forma $(x,-x)\in\partial D$, ossia $Q_\pm=(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$.
Poiché $f(Q_-)=\frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}<0<f(Q_+)=\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}<\sqrt{3}=f(P)$, otteniamo che la funzione $f(x,y)$ ammette il valore minimo in Q_- e il valore massimo in P.

Esercizio 2
Ricordiamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo naturale: $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)$ per $t\to 0$. La funzione $f(x,y,z)$ è continua in $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

(ove $t=x^2+y^6z^2\to 0$).
Le derivate parziali di $f(x,y,z)$ in zero sono facilmente calcolate:

$$\partial_x f(0,0,0)=\partial_z f(0,0,0)=\lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s^2)-s^2}{s^3}=0,$$
$$\partial_y f(0,0,0)=\lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s^6)-s^6}{s^7}=0.$$

La funzione $f(x,y,z)$ risulta essere anche differenziabile:

$$\lim_{(x,y,z)\to 0}\left|\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-\nabla f(0,0,0)\cdot(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|\leq\lim_{(x,y,z)\to 0}\left|\frac{f(x,y,z)-1}{\sqrt{x^2+y^6+z^2}}\right|=\lim_{t\to 0}\left|\frac{\ln(1+t)-t}{t^{\frac{3}{2}}}\right|=0$$

(come prima $t=x^2+y^6+z^2$). Calcoliamo ora le derivate di $f(x,y,z)$ fuori dall'origine con le usuali regole di derivazione:

$$\partial_x f(x,y,z)=\frac{2x}{x^2+y^6+z^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^6+z^2}-\frac{\ln(1+x^2+y^6+z^2)}{x^2+y^6+z^2}\right),$$
$$\partial_y f(x,y,z)=\frac{6y^5}{x^2+y^6+z^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^6+z^2}-\frac{\ln(1+x^2+y^6+z^2)}{x^2+y^6+z^2}\right),$$
$$\partial_z f(x,y,z)=\frac{2z}{x^2+y^6+z^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^6+z^2}-\frac{\ln(1+x^2+y^6+z^2)}{x^2+y^6+z^2}\right).$$

Poiché $t-(1+t)\ln(1+t)=-\frac{t^2}{2}+O(t^3)$, otteniamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}=-\frac{1}{4}$$

e la funzione $f(x,y,z)$ risulta essere derivabile con continuitá in $(0,0,0)$.

Esercizio 3
Il polinomio caratteristico λ^2+4 ha due radici complesse coniugate $\pm 2i$ e lo spazio delle soluzioni omogenee sará quindi generato da $\sin(2x)$, $\cos(2x)$.
Per il metodo di variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = c_1(x)\cos(2x) + c_2(x)\sin(2x)$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{c_1}\cos(2x) + \dot{c_2}\sin(2x) = 0 \\ -\dot{c_1}\sin(2x) + \dot{c_2}\cos(2x) = \frac{\tan x}{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$c_1(x) = -\int \sin^2 x dx = \int \frac{\cos(2x)-1}{2} = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2}$$

e

$$c_2(x) = \int \left(\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\tan x}{2}\right) dx = -\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{1}{2}\int \frac{sds}{1+s^2} \;|_{s=\tan x} = -\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x).$$

La soluzione particolare risulta essere:

$$\bar{y}(x) = (\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2})\cos(2x) - (\frac{\cos(2x)}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x))\sin(2x).$$

Poiché $\bar{y}(0) = 0$ e $\dot{\bar{y}}(0) = -\frac{1}{2}$, la soluzione richiesta sará:

$$y(x) = \bar{y}(x) + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

Esercizio 4
Poiché $\omega \;|_{z=0} = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ è (localmente) il differenziale della funzione angolo e $\partial^+ S$ è la circonferenza unitaria nel piano $\{z=0\}$ percorsa in senso antiorario, si ha che:

$$\int_{\partial^+ S} \omega = 2\pi.$$

La superficie S è parametrizzata dalla mappa $(x,y) \in D = \{x^2+y^2 \le 1\} \to \varphi(x,y) = (x,y,x^2+y^2-1)$ con normale $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-2x,-2y,1)$. Sia $V(x,y,z)$ il campo vettoriale associato alla $1-$forma $\omega(x,y,z)$. Tenendo conto che $x^2+y^2-z=1$ sulla superficie S, si ottiene che

$$\text{rot } V = \left(xz - 2z - 2xy^2z - x - z^2, 2x^2yz - yz - y - z - 1, 2 - 2x^2 - 2xz^2 - 2y^2 - 2yz\right) \quad \text{su } S.$$

Quindi si ha che:

$$\text{rot } V \cdot \nu = 2 + 2(y^4 - x^4) + 2(x^2 - y^2) + (2y - 4x + 4x^3 + 4xy^2) \quad \text{su } S.$$

Poiché

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta\,, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta$$
$$\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin^2\theta d\theta,$$

si ottiene in coordinate polari $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ che:

$$\int_S \text{rot } V \cdot \nu d\sigma = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} 2 = 2\pi.$$