Appello B di AM3 - 19/6/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

a) Si ha che:

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to 1^-} f(x,y,z) = \lim_{r\to 1^-} e^{-\frac{1}{1-r}} = 0.$$

Poiché $f = 0$ se $x^2+y^2+z^2 \geq 1$, si ha anche

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to 1^+} f(x,y,z) = 0.$$

Quindi per ogni $(x_0,y_0,z_0) \in S^2$ vale

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Quindi f risulta essere continua in tutto $\mathbb{R}^3$.

b) Calcoliamo le derivate parziali in $(1,0,0) \in S^2$ usando la definizione. Si ha che:

$$\frac{f(1+t,0,0)-f(0,0,0)}{t} = \begin{cases} 0 & \text{se } t>0 \\ e^{\frac{1}{t(2+t)}} & \text{se } t<0 \end{cases} \to_{t\to 0} 0,$$

poiché $\lim\limits_{t\to 0^-} e^{\frac{1}{t(2+t)}} = 0$. Per le altre due derivate parziali, osserviamo che $f(1,t,0) = f(1,0,t) = 0$ per $t \neq 0$. Quindi

$$\nabla f(1,0,0) = (0,0,0).$$

Poiché la funzione $f(x,y,z)$ è radiale, abbiamo che $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z) \in S^2$.

c) In $\mathbb{R}^3 \setminus S^2$ è possibile calcolare il gradiente con le usali regole di calcolo ottenendo:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{cases} -2(1-x^2-y^2-z^2)^{-2} e^{-\frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}}(x,y,z) & \text{se } x^2+y^2+z^2<1 \\ (0,0,0) & \text{se } x^2+y^2+z^2>1. \end{cases}$$

Poiché

$$\lim_{x^2+y^2+z^2\to 1^-} |-2(1-x^2-y^2-z^2)^{-2} e^{-\frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}}(x,y,z)| = 2\lim_{r\to 1^-}(1-r)^{-2}e^{-\frac{1}{1-r}} = 0,$$

otteniamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 2

a) Abbiamo che $F(0,0,0) = 0$ e

$$\partial_z F(0,0,0) = \cos(x+z) + e^y \mid_{x=y=z=0} = 2 \neq 0.$$

Dal Teorema della Funzione Implicita abbiamo che esistono $\rho, r > 0$ piccoli ed una mappa $g : B_r(0,0) \to (-\rho,\rho)$ tali che $g(0,0) = 0$ e vale la rappresentazione:

$$\{(x,y,z) \in B_r(0,0) \times (-\rho,\rho) :\ F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,g(x,y)) :\ (x,y) \in B_r(0,0)\}.$$

Poiché $T = \frac{1}{2}$, possiamo scegliere $r, \rho > 0$ piccoli tali da soddisfare:

$$\sup_{B_r(0,0)} \big|\sin x + \sin(x+y)\big| \leq \rho\,, \qquad \sup_{B_r(0,0)\times(-\rho,\rho)} \big|1 - \frac{1}{2}\cos(x+z) - \frac{1}{2}e^y\big| \leq \frac{1}{2}.$$

Per la prima stima, osserviamo che:

$$\big|\sin x + \sin(x+y)\big| \le 2|x| + |y| \le 3r.$$

Basterá quindi prendere $r \le \frac{\rho}{3}$. Per la seconda stima, otteniamo che:

$$\big|1 - \frac{1}{2}\cos(x+z) - \frac{1}{2}e^y\big| \le \frac{1}{2}|1-\cos(x+z)| + \frac{1}{2}|1-e^y| \le \frac{1}{2}|x+z| + \frac{3}{2}|y| \le 2\rho.$$

Basterá quindi prendere $\rho = \frac{1}{4}$ e $r = \frac{1}{12}$.
b) Poiché $\sin(x+y) + \sin(x+g(x,y)) + e^y g(x,y) \equiv 0$ in $B_r(0,0)$, possiamo derivare questa espressione in x e y per ottenere rispettivamente:

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y) + \cos(x+g(x,y))\,(1+\partial_x g(x,y)) + e^y \partial_x g(x,y) \equiv 0,\\
&\cos(x+y) + \cos(x+g(x,y))\,\partial_y g(x,y) + e^y g(x,y) + e^y \partial_y g(x,y) \equiv 0
\end{aligned}$$

per $(x,y) \in B_r(0,0)$. Calcolando tali espressioni per $(x,y) = (0,0)$ otteniamo

$$\partial_x g(0,0) = -1\ ,\ \ \partial_y g(0,0) = -\frac{1}{2}.$$

Derivando tali relazione ulteriormente in x e y e calcolandone poi il valore in $(0,0)$, otteniamo

$$\partial_{xx} g(0,0) = 0\ ,\ \ \partial_{xy} g(0,0) = \frac{1}{2}\ ,\ \ \partial_{yy} g(0,0) = \frac{1}{2},$$

e quindi lo sviluppo cercato sará:

$$g(x,y) = -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy + o(x^2+y^2).$$

Esercizio 3
Calcoliamo il gradiente di $f(x,y,z)$:

$$\nabla f(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+xy+2y^2+z^2)^2}\,(2x+y, x+4y, 2z)\,.$$

Quindi $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ se e solo se $(x,y,z) = (0,0,0)$. Poiché l'origine non appartiene a D, la funzione $f(x,y,z)$ non ammette punti critici liberi nell'interno di D. La frontiera di D è l'unione disgiunta della sfera S_1 di raggio 1 e della sfera S_2 di raggio $\sqrt{2}$. Dovremo considerare i punti critici vincolati di f prima su S_1 e poi su S_2, ossia le soluzioni in S_1 e S_2 di

$$2x+y = \lambda x\ ,\ \ x+4y = \lambda y\ ,\ \ 2z = \lambda z,$$

ove abbiamo riassorbito il fattore $(x^2+xy+2y^2+z^2)^2$, presente in ognuna delle tre equazioni del sistema, nel moltiplicatore di Lagrange λ.
Abbiamo due possibilitá.
a) $\lambda = 2$ e quindi $x = y = 0$
b) $z = 0$. Poiché $x \ne 0$ (altrimenti $x = y = 0$), dalla prima equazione $\lambda = 2 + \frac{y}{x}$ che inserito nella seconda equazione produce: $2xy = y^2 - x^2$.

Discutiamo il caso a) imponendo $(0,0,z) \in S_i$, $i = 1,2$. Otteniamo quindi $(0,0,\pm 1)$ e $(0,0,\pm\sqrt{2})$. Inoltre

$$f(0,0,\pm 1) = 1\ ,\ \ f(0,0,\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{2}.$$

Discutiamo ora il caso b) imponendo $(x, y, 0) \in S_i$, $i = 1, 2$. Se $x^2+y^2 = 1$, dal quadrato della relazione $2xy = y^2 - x^2$ otteniamo che: $0 = y^4 + x^4 - 6x^2y^2 = (1 - x^2)^2 + x^4 - 6x^2(1 - x^2) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, e quindi $x^2 = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$, $y^2 = 1 - x^2 = \frac{2\mp\sqrt{2}}{4}$ (il $+$ in x^2 corrisponde al $-$ in y^2). Essendo in questi punti $2x^2 + 2xy = 2x^2 + y^2 - x^2 = x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$, la funzione $f(x, y, z)$ si riduce a $\frac{2}{1+4y^2}$ e vale quindi $\frac{2}{3\mp\sqrt{2}}$. Ragionando in modo analogo per $x^2 + y^2 = 2$, otteniamo $x^2 = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y^2 = 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $f(x, y, z)$ vale: $\frac{1}{3\mp\sqrt{2}}$.
Confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo che:

$$\min_D f = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\,, \quad \max_D f = \frac{2}{3-\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4
Il polinomio caratteristico $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ ha tre radici reali distinte 0, 1 e 2. Lo spazio delle soluzioni omogenee sará quindi generato da 1, e^x, e^{2x}.
Osservando che $(\ddot{y}-3\dot{y}+2y)' = y''' - 3y'' + 2y'$, possiamo ricondurci alla seguente equazione di secondo grado:

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = \int (x-1)(e^x - 1) = e^x(x-2) - \frac{x^2}{2} + x.$$

Visto che l'equazione omogenea ha come soluzione e^x, cerco una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = c(x)e^x$. Abbiamo che

$$\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = e^x(\ddot{c} - \dot{c}) = e^x(\dot{c} - c)' = e^x(x-2) - \frac{x^2}{2} + x.$$

Quindi otteniamo

$$\dot{c} - c = \int [(x-2) - (\frac{x^2}{2} - x)e^{-x}] = \frac{x^2}{2}(1 + e^{-x}) - 2x$$

che ci fornisce

$$(e^{-x}c(x))' = e^{-x}(\dot{c} - c) = \frac{x^2}{2}e^{-x}(1 + e^{-x}) - 2xe^{-x}.$$

Integrando ulteriormente, si ottiene

$$c(x) = e^x \int [\frac{x^2}{2}e^{-x}(1 + e^{-x}) - 2xe^{-x}] = (x + 1 - \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{8}(2x^2 + 2x + 1)e^{-x}.$$

Allora la soluzione particolare viene

$$\bar{y}(x) = (x + 1 - \frac{x^2}{2})e^x - \frac{1}{8}(2x^2 + 2x + 1).$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea di partenza sará

$$y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + x(1 - \frac{x}{2})e^x - \frac{x}{4}(x+1),$$

ove le costanti c_i, $i = 1, 2, 3$, sono da determinare imponendo le condizioni iniziali. Si ottiene facilmente che $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$. La soluzione cercata sará:

$$y(x) = 1 + x(1 - \frac{x}{2})e^x - \frac{x}{4}(x+1).$$

Esercizio 5
a) La forma ω_1 è esatta pocihé $\omega_1 = df$, con $f(x, y, z) = x^2yz^2$ potenziale associato. Invece ω_2 non è chiusa poiché:

$$\partial_z(2xyz^2 + z^3y) = 4xyz + 3z^2y \neq 4xyz = \partial_x(2x^2yz).$$

b) Poiché $\partial^+ S$ è l'ellisse $C = \{x^2 + 2y^2 = 1\}$ nel piano $\{z = 0\}$, si vede facilmente che

$$\int_{\partial^+ S} \omega_2 = \int_C \omega_1 = 0$$

poiché la forma ω_1 è esatta. Alternativamente, si puó osservare che $\omega_2 = 0$ nel piano $z = 0$.
c) Abbiamo rot $F = (0, 3z^2 y, -z^3)$. La mappa $\varphi : (x, y) \in D \to (x, y, \frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}) \in S$ parametrizza la superficie S, ove $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ è una porzione di piano 2-dimensionale racchiusa dall' ellisse C. Poiché $\varphi_x = (1, 0, \frac{-x}{3\sqrt{1-x^2-2y^2}})$, $\varphi_y = (0, 1, \frac{-2y}{3\sqrt{1-x^2-2y^2}})$ otteniamo che $\varphi_x \wedge \varphi_y = (\frac{x}{3\sqrt{1-x^2-2y^2}}, \frac{2y}{3\sqrt{1-x^2-2y^2}}, 1)$. Essendo $n = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|}$ e $d\sigma = |\varphi_x \wedge \varphi_y|$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } F \cdot n d\sigma &= \int_D \text{rot } F \cdot (\frac{x}{3\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}, \frac{2y}{3\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}, 1) dxdy \\
&= \int_D [\frac{2}{9} y^2 \sqrt{1 - x^2 - 2y^2} - \frac{1}{27}(1 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}] dxdy.
\end{aligned}$$

Parametrizzando D tramite la coordinate polari $D = \{\rho(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi], \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } F \cdot n d\sigma &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho [\frac{2}{9}\rho^2 \sin^2\theta \sqrt{1 - 2\rho^2} - \frac{1}{27}(1 - 2\rho^2)^{\frac{3}{2}}] \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho [\frac{\rho^2}{9}\sqrt{1 - 2\rho^2} - \frac{1}{27}(1 - 2\rho^2)^{\frac{3}{2}}] d\rho.
\end{aligned}$$

Col cambio di variabili $s = \sqrt{1 - 2\rho^2}$, arriviamo al seguente risultato:

$$\int_S \text{rot } F \cdot n d\sigma = \sqrt{2}\pi \int_0^1 [\frac{s^2}{18}(1 - s^2) - \frac{1}{27}s^4] ds = \sqrt{2}\pi (\frac{s^3}{54} - \frac{s^5}{54}) |_0^1 = 0.$$

Esercizio 6
Poniamo $D = \{(u, v) : 0 \leq v \leq u,\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\}$. Si ha che $\varphi_u = (\cos v, 0, 0)$, $\varphi_v = (-u \sin v, 1, -\sin v)$, $\varphi_u \wedge \varphi_v = (0, \sin v \cos v, \cos v)$ e $|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \cos v \sqrt{1 + \sin^2 v}$. Allora, usando il Teorema di Fubini per il dominio normale D, otteniamo che:

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1 + \sin^2 y}} d\sigma &= \int_D u \cos^2 v du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u du \int_0^u \cos^2 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{u^2}{2} + \frac{u}{4}\sin(2u)) du \\
&= \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u\cos(2u)}{8}\right) |_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$