

Esercitazione AM2 n. 2 - A.A. 2005-2006 - 11/10/05

Serie di potenze e serie di funzioni

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{1+x^{2n}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3x)^n}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) e^{-nx^2}$.

5. $\sum_{n=2}^{\infty} (x^2 - 1)^n \log \left(1 + \frac{x^2-1}{n} \right)$.

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (\log n)^x}$.

Studiare le seguenti serie di potenze:

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) x^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) x^{2n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2-n}}{n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$.

Calcolare la somma delle seguenti serie:

11. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 2 - 11/10/05

1. Convergenza puntuale in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (0, +\infty)$, convergenza totale in $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ con $a < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b > 0$.
2. Convergenza puntuale in $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, convergenza totale in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > \frac{1}{3}$.
3. Convergenza totale su tutto \mathbb{R} perché $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq ne^{-\frac{3}{4}n}$.
4. Convergenza puntuale ed assoluta per ogni $x \neq 0$. Convergenza totale per $|x| \geq \delta$ per ogni $\delta > 0$.
5. Convergenza puntuale per $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, assoluta per $x \neq 0$. Convergenza totale per $\delta \leq |x| \leq \sqrt{2} - \delta$ per ogni $\delta > 0$.
6. Convergenza puntuale in $(0, \infty)$, assoluta per $x > 1$. Convergenza totale in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 1$.
7. Il raggio di convergenza é $R = \frac{1}{9}$. Convergenza puntuale in $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$, totale nei compatti contenuti.
8. Il raggio di convergenza é $R = 1$. Convergenza puntuale in $(-1, 1)$, totale nei compatti contenuti.
9. Il raggio di convergenza é $R = 1$. Convergenza puntuale in $(-1, 1)$, totale nei compatti contenuti.
10. Il raggio di convergenza é $R = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Convergenza puntuale in $(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, totale nei compatti contenuti.
11. Derivare la somma della serie geometrica, moltiplicare tutto per x . Ripetere il procedimento per quattro volte ottenendo $\frac{x(x^3+11x^2+11x+1)}{(1-x)^5}$.
12. La serie, se divisa per x , equivale all'integrale della somma della serie geometrica di ragione x^2 . Quindi la somma é $\frac{1}{2x} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.