Esercitazione AM2 n. 1 - A.A. 2005-2006 - 26/9/05

Successioni di funzioni

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni negli intervalli indicati:

1. $f_n(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}$, $x \in (0,1)$.

2. $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{1+nx}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = \frac{1}{1+n^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
Studiare anche la successione delle derivate.

6. $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[\frac{1}{2n},\frac{1}{n})}$, $x \in (0,1)$.
Verificare che non converge uniformemente ma che vale il passaggio al limite sotto segno di integrale.

7. $f_n(x) \begin{cases} an^2x & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b}n^2x + \frac{ab}{b-1}n & \frac{1}{n} \le x < \frac{b}{n} \\ 0 & \frac{b}{n} \le x \le b \end{cases}$
Verificare che non converge uniformemente e che non vale il passaggio al limite sotto segno di integrale.

8. $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} + x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

9. $f_n(x) = e^{\frac{n^3}{n(x-1)}}\chi_{[n,\infty)}$, $x \in \mathbb{R}$.

10. $f_n(x) \begin{cases} n^3|x|^3 & |x| \le \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < |x| \le 1 \end{cases}$
E' vero che $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$?

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 1 - 26/9/05

1. $f_n(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}$, $x \in (0,1)$. La successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ su $(0,1)$. Non converge uniformemente perché $\sup_{(0,1)} f_n(x) = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, quindi si ha convergenza uniforme su $[a,1)$ con $a > 0$.

2. $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{1+nx}$, $x \in \mathbb{R}$. La successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ su per $x \geq 0$. Poiché esiste $x_0 > 0$ tale che $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| \leq x_0 e^{-nx_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la convergenza é uniforme su tutto $[0,+\infty)$.

3. $f_n(x) = \frac{1}{1+n^x}$, $x \in \mathbb{R}$. La successione converge alla funzione $f(x) = 0$ per $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$ per $x = 0$ e $f(x) = 1$ per $x < 0$. Chiaramente $f(x) \notin C(\mathbb{R})$, quindi la convergenza é uniforme solo su $\mathbb{R} \setminus (-\delta,\delta)$ per ogni $\delta > 0$.

4. $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$. La successione converge alla funzione nulla su $\mathbb{R}$, ma il $\sup_{\mathbb{R}} f_n(x) = 1$ per ogni n, quindi la convergenza é uniforme solo sui compatti di $\mathbb{R}$.

5. $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. La successione converge puntualmente ma non uniformemente alla funzione $f(x) = 0$ per $x > 0$ e $f(0) = 1$. La successione delle derivate converge puntualmente ma non uniformemente alla funzione $f(x) = 0$ per $x > 0$.

6. $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[\frac{1}{2n},\frac{1}{n})}$, $x \in (0,1)$. La successione converge puntualmente alla funzione nulla su $\mathbb{R}$, non vi converge uniformemente perché $\sup_{(0,1)} f_n(x) = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, ma $\int_0^1 f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. La successione converge puntualmente a zero perché $[\frac{b}{n}, b] \to [0,b]$, ma non converge uniformemente perché $\sup_{[0,b]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = an \to \infty$. Inoltre non vale il passaggio al limite sotto segno di integrale perché $\int_0^b f_n(x) = ab > 0$ per ogni n.

8. $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} + x^n$, $x \in \mathbb{R}$. La successione converge a $f(x) = 0$ per $-1 < x < 1$, $f(1) = 1$. La convergenza non é uniforme ma lo é su $|x| \leq a$ per ogni $a < 1$ visto ché $\sup_{|x|\leq a} |f_n(x)| \leq \frac{e^{\frac{a}{n}}}{n} + a^n \to 0$.

9. $f_n(x) = e^{\frac{n^3}{n(x-1)}}\chi_{[n,\infty)}$, $x \in \mathbb{R}$. La successione converge puntualmente a zero perché per ogni x esiste $n_x = \max\{[x], 0\}$ tale che $f_n(x) \equiv 0$ per ogni $n \geq n_x$. La convergenza é uniforme solo sui compatti di $\mathbb{R}$ in quanto $f_n(n) = e^{\frac{n^3}{n(n-1)}} \to \infty$.

10. La successione converge puntualmente a $f(x) = 1$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. La convergenza é uniforme solo in $[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)$ per ogni $\delta > 0$. Inoltre $\int_{-1}^{1}(f_n(x) - f(x))\, dx = 0$ per ogni n.