AM2: Tracce delle lezioni-II settimana

SERIE DI FUNZIONI

Date $a_n(x), x \in E$, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **converge puntualmente in** E se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge puntualmente in E e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \ := \ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$$

Serie di potenze

Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \quad x, x_0 \in \mathbf{R}$, la serie di funzioni

$$(SP) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

si chiama serie di potenze in $x - x_0$. Nel seguito, sostituendo eventualmente $x - x_0$ con x, supporremo $x_0 = 0$.

L'insieme in cui converge una serie di potenze é necessariamente un intervallo:

Proposizione. Se $\ r \ = \ (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \qquad ((\frac{1}{0} := +\infty, \ \ \frac{1}{\infty} := 0)$

$$|x| \ < \ r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ < \ +\infty, \quad |x| \ > \ r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ = \ +\infty$$

Ció segue subito dal criterio della radice:

$$|x| \ \limsup_n \, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \ = \ \limsup_n \, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \ < \ 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ < \ +\infty$$

$$|x| \ \limsup_n \, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \ = \ \limsup_n \, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \ > \ 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \, x^n| \ = \ +\infty$$

Raggio di convergenza. $\quad r \ = \ (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \qquad ((\frac{1}{0} := +\infty, \ \frac{1}{\infty} := 0)$

si chiama raggio di convergenza e $\{|x| < r\}$ é l' intervallo di convergenza.

NOTA. $\quad \exists \quad \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \quad \Rightarrow \quad r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|. \qquad$ Infatti

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \to r \quad \Rightarrow \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r}$$

ESEMPI (di serie di potenze).

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e}.$$

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. In (3) :
se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$
Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$
se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.
In (4) : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} = +\infty$ perché, dalla formula di Stirling, $\frac{n^n}{n!\, e^n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} + \circ(\sqrt{n})}$.
Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ per il criterio di Leibnitz.

SERIE UNIFORMEMENTE CONVERGENTI. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge uniformemente in E

Criterio di Cauchy . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E sse

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ n \geq n_\epsilon, p \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ \sup_{x \in E} \ |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \ \leq \ \epsilon$$

Serie totalmente convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E} \ |a_n(x)| \ < \ +\infty$$

La totale convergenza implica l'uniforme convergenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E} |a_n(x)| \ < \ +\infty \ \Rightarrow |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \ \leq \ \sum_{j=n}^{n+p} |a_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+p} \sup_{x \in E} \ |a_n(x)| \leq \epsilon \ \ \forall x \in E$$

ESEMPI di serie uniformemente convergenti ma non totalmente convergenti:

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente in modo uniforme , ma non é totalmente convergente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = +\infty$.

2. sia $f \in C(\mathbf{R})$, nulla fuori di $(0,1)$, $a_n(x) := \frac{1}{n} f(x-n)$.

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(x-n)$ converge alla funzione $S(x)$ che vale $\frac{1}{n} f(x-n)$ in $[n, n+1]$ e zero se $x \le 0$. Inoltre la convergenza é uniforme in $\mathbf{R}$, perché $|S(x) - S_n(x)| = |\sum_{j>n} \frac{1}{j} f(x-j)| \le \frac{1}{n+1} \sup\limits_{\mathbf{R}} |f| \to 0$.

La convergenza peró non é totale, perché $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |a_n(x)| = \frac{1}{n} \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$.

Convergenza totale delle serie di potenze. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza r, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge totalmente in $[-\delta, \delta]$, $\forall \delta < r$:

$$\sup_{|x|\le\delta} |a_n x^n| = |a_n|\delta^n \quad \text{e} \quad \sum_{0}^{\infty} |a_n|\delta^n < +\infty$$

Criterio di Leibnitz. Se $0 \le a_{n+1}(x) \le a_n(x)$ $\forall x \in E$, $n \in \mathbf{N}$, allora

$$\sup_{x\in E} a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) \text{ converge uniformemente in } E$$

Intanto, la serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibnitz per le serie numeriche. La convergenza é anche uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \le \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \le 0, \quad a_{2n}(x) \ge \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)| \le a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

Teorema (di integrazione, derivazione termine a termine).

(i) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é continua in $[a,b]$.

(ii) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

(iii) Siano $a_n \in C^1(I)$. Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge in qualche punto di I e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ converge uniformemente in I, allora

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dx}(x)$$

La somma di una serie di potenze é una funzione C^∞.

Le $a_n(x) := a_n x^n$ sono funzioni C^∞ e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n |n(n-1)\dots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

UN ESEMPIO: $\quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j, \quad \forall x \in (-1,1).$

Integrazione per serie negli integrali impropri.

Siano $f_n \geq 0$ continue in (a,b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sui sottointervalli compatti di (a,b), allora

$$\int_a^b [\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Infatti, posto $S(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \geq \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$

se $\int\limits_a^b S(x)\, dx < +\infty$, la successione delle somme parziali é equidominata e quindi é lecito il passaggio al limite sotto segno di integrale,

se $\int\limits_a^b S(x)\, dx = +\infty$, allora $\quad a < \alpha < \beta < b \quad \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx = \int_\alpha^\beta S(x)\, dx \to_{\alpha\to a,\ \beta\to b} = \int_a^b S(x)\, dx = +\infty$$

NOTA L'ipotesi di uniforme convergenza sui sottointervalli compatti di (a,b) é automaticamente soddisfatta se $S(x) := \sum_n f_n(x)$ é continua in (a,b) (teorema di Dini, applicato a $S - \sum_{k=1}^n f_k$).