AM2: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

In quanto segue, $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}$, $D_r(u) \subset A$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$.

DERIVATE PARZIALI Se $t \to f(t, x_2, \ldots, x_n)$ é derivabile in $t = x_1$, diremo che f é (parzialmente) derivabile rispetto alla prima variabile x_1 in u e scriveremo

$$f_{x_1}(u) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) : = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_1 + \delta, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\delta}$$

ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{d}{dt} f(t, x_2, \ldots, x_n)_{|t=x_1}$. Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + \delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(u + \delta e_j) - f(u)}{\delta}$$

(e_j ha coordinate tutte nulle eccetto la j-esima, che vale 1) se tale limite esiste finito.

Sia O aperto: $f \in C^1(O)$ se $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$ esistono e sono continue in O.

DERIVATE DIREZIONALI Sia $h \in \mathbf{R}^n$. Se $t \to f(u + th)$ é derivabile a destra in $t = 0$, diremo che f é derivabile nella direzione h in u e scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial h}(u) := \frac{d}{dt} f(u + th)_{|t=0^+} := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(u + th) - f(u_0)}{t}$$

DIFFERENZIABILITÁ, DIFFERENZIALE, GRADIENTE Se esiste un vettore $a \in \mathbf{R}^n$ tale che

$$f(u + h) - [f(u) + < a, h >] = \circ(||h||) \quad \text{per} \quad ||h|| \to 0$$

f si dice differenziabile in u, a si chiama gradiente di f in u e si denota $\nabla f(u)$:

$$\frac{f(u + h) - [f(u) + < \nabla f(u), h >]}{\|h\|} \to_{\|h\| \to 0} 0$$

Il funzionale lineare in $\mathbf{R}^n$ dato da $h \to < \nabla f(u), h >$ si chiama differenziale di f in u e si indica $df(u)$. Dunque

$$df(u)\,(h) = < \nabla f(u), h > \qquad \forall h \in \mathbf{R}^n$$

$$f(u + h) = f(0) + df(u)\,(h) + \circ(||h||) \qquad \text{per} \quad ||h|| \to 0$$

ESEMPI 1 (i) $f(x, y) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1}\, x y^{n-1} + a_n\, y^n$,

$$f(x,y) \;=\; e^{x^2+y^2}, \quad f(x,y) \;=\; \sin xy \quad \text{sono di classe} \quad C^1(\mathbf{R}^2)$$

(ii) $f(x,y) \;=\; \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha anche derivate parziali in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \;=\; 0$$

Tuttavia f non ha derivata in $(0,0)$ nella direzione h , a meno che non sia $h=(x,0)$ oppure $h=(0,y)$ per qualche x,y, perché $f(tx,ty) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
Ricordiamo che f non é continua in zero. Dunque,

una funzione puó avere derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto.

A futura memoria: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{1}{y}$ $\forall y \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0,0)$.

(iii) $f(x,y) \;=\; \frac{x^4 y}{x^6+|y|^3}$, $f(0,0) \;=\; 0$. É $\frac{f(tx,ty)}{t} \;=\; \frac{tx^4y}{t^3x^6+|y|^3} \rightarrow_{t\to 0^+} 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0 \;\; \forall h \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x,x^2) \;\equiv\; \frac{1}{2}$, vediamo che

una funzione puó essere derivabile, in un punto, lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iiii) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha derivate parziali anche in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Inoltre, in $(0,0)$, f **é derivabile in tutte le direzioni**: $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_t \frac{f(th)}{t} = f(h)$.

Ricordiamo inoltre che che f **é continua** anche in zero.

Tuttavia f **non é differenziabile** in $(0,0)$, perché, come vedremo nella seguente Proposizione 1, ció comporterebbe $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) \;=\; < \nabla f(0,0), h >$, ovvero, nell'esempio in questione, $f(h) = 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$. Dunque

una funzione puó essere continua e derivabile lungo tutte le direzioni , in un punto, senza essere differenziabile in quel punto.

Notiamo che: $|\frac{\partial f}{\partial x}(t,t)| = \frac{1}{2}$ per $t \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0,0)$.

Proposizione 1 Sia f differenziabile in u. Allora f é continua in u e

$$\forall h \in \mathbf{R}^2, \quad \exists \ \frac{\partial f}{\partial h}(u) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial h}(u) \ = < \nabla f(u), h >$$

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$ esistono per ogni j e $\nabla f(u) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)\Big)$.

Infatti $|f(u+h) - f(u)| \le | < \nabla f(u), h > + \circ(||h||)| \le (\|\nabla f(u)\| + \circ(1))||h||$,

e quindi f é continua in u. Poi, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : \ ||h|| = 1, |t| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow$

$|\frac{f(u+th)-f(u)}{t} - < \nabla f(u), h > | \ = \ |\frac{f(u+th)-f(u)-<\nabla f(u),th>}{t}| \ = \ \frac{\circ(||th||)}{|t|} \le \epsilon$.

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) \ = \ \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(u+te_j)-f(u)}{t} \ = < \nabla f(u), e_j >$.

Proposizione 2 $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad f$ é differenziabile in u.

Prova. Per semplicitá: $n = 2$. Scriviamo $u = (x, y)$. Da $f_x, \ f_y$ continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \quad |\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)| \ \le \ \epsilon \qquad \forall\, w, v \in D_\delta(u)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau} f(\tau, y+t) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau} f(x, \tau) \ = \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau)$ otteniamo

$$\left| f(x+s, y+t) \ - \ f(x,y) \ - \ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right] \right| =$$

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x, y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right| \le$$

$$\left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] d\tau \right|$$

$$\le \ \epsilon \ (|s| + |t|) \qquad \text{se} \quad s^2 + t^2 \le \delta_\epsilon^2$$

ESEMPI 2. (j) Se $g \in C([a,b]), \ f(x,y) := \int_x^y g(t)dt, \ \ x, y \in [a,b] \times [a,b]$, é $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \ \frac{\partial f}{\partial y} = g(y), \ \ x, y \in (a,b)$ e quindi $f \in C^1((a,b) \times (a,b))$.

(jj) Le funzioni in Esempi 1-(ii)-(iii) sono differenziabili per la Prop. 2 in ogni $u \neq 0$ mentre in $(0,0)$, pur avendo derivate parziali od addirittura derivate in tutte le direzioni, non sono differenziabili perché discontinue.

(jjj) $f(x,y) = \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}$, $f(0,0) = 0$ é continua in $(0,0)$ perché $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial h}(0) = \lim_t \frac{f(th)}{t} = 0 \ \forall h \in \mathbf{R}^2$.

Ma f non é differenziabile in $(0,0)$: $y = x^2 \Rightarrow \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \equiv \frac{1}{2}$.

Il Teorema del valor medio Sia $f \in C^1(O)$, O aperto convesso. Allora

$$|f(u) - f(v)| \ \leq \ ||u - v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Infatti $$|f(u) - f(v)| \ = \ |\int_0^1 [\frac{d}{dt}f(v + t(u - v))] \ dt| \ =$$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u - v)), u - v > \ dt| \ \leq \ ||u - v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Corollario Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso per archi. Allora

$$\nabla f(u) \ = \ 0 \ \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{ cost. } \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Fissati $u, v \in O$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in O \ \forall t \in [0,1]$, cammino continuo in O, con $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi e quindi, dalla continuitá di γ segue: $\overline{t} := \sup\{t : f(\gamma(s)) = f(u) \ \ \forall s \in [0,t)\} > 0$ e, argomentanto per contraddizione, necessariamente $\overline{t} = 1$.

Cammini differenziabili Se $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $x_i \in C^1([0,1]) \ \forall i = 1, \ldots, n$ scriveremo $\gamma \in C^1([0,1], \mathbf{R}^n)$ e diremo che γ é cammino differenziabile e

$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$ é il **vettore tangente** a γ in $\gamma(t)$.

Esempio. $\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, $\dot{\gamma}(t) = (-2\pi r\sin 2\pi t, 2\pi r\cos 2\pi t)$

Sia $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2)$, $h \in \mathbf{R}^2$. Sia $\gamma(t) = (th, f(th))$ parametrizzazione della curva ottenuta intersecando il grafico di f con il piano passante per l'asse delle z e per la retta che unisce h all'origine. Il vettore tangente alla curva γ nell'origine é

$$(h, < \nabla f(0,0), h >) = (\frac{d}{dt}(th), \frac{d}{dt}f(th))$$

Al variare di h in $\mathbf{R}^2$ si ottengono tutti i **vettori tangenti al grafico di** f in $(0,0)$).

Derivazione di funzioni composte Sia $f \in C^1(O), \gamma \in C^1([0,1], O)$ Allora

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \ = < \ \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) \ >$$

É: $\gamma(t+s) = \gamma(t) + \dot\gamma(t)s + h(s), \ f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u), h > + \sigma(h) \ \Rightarrow$

$$f(\gamma(t+s)) \ = \ f(\gamma(t)) + \ < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > \ s \ + \ \circ(s) \quad \text{ove}$$

$\circ(s) := < \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))$. Infatti $\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0, s_e > 0 :$ $(||k|| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sigma(k) \le \epsilon ||k||)$ e $(|s| \le s_\epsilon \ \Rightarrow \ ||h(s)|| \le \epsilon |s|$ e $||\dot\gamma(t)|||s| + ||h(s)|| \le \delta_\epsilon)$ $\Rightarrow \ | < \nabla f(\gamma(t)), h(s) > \ + \sigma(\dot\gamma(t)s \ + \ h(s))| \le \epsilon \, |s| \, (||\nabla f(\gamma(t))|| \ + \ ||\dot\gamma(t)|| \ + \ 1)$.

Significato geometrico del differenziale

(ovvero della forma lineare $h \to < \nabla f(0,0), h >$, $h \in \mathbf{R}^n$)
Per semplicitá, sia $n = 2$. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Il suo grafico é la 'superfice' in $\mathbf{R}^3$

$$\{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \ \text{dominio di } f\}$$

Piano tangente . Per semplicitá supponiamo $f(0,0) = 0$. Il piano in $\mathbf{R}^3$

$$z \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

che ha la proprietá di approssimare bene il grafico di f in punti vicini a $(0,0)$:

$$f(h) - < \nabla f(0,0), h > = \circ(\|h\|), \qquad h = (x,y) \to 0$$

si chiama **piano tangente al grafico di** f in $(0, 0, f(0,0))$. É formato dai vettori

$$(h, < \nabla f(0,0), h >) = (\frac{d}{dt}(th), \frac{d}{dt} f(th)) \qquad h \in \mathbf{R}^2$$

(**vettori tangenti al grafico di** f in $(0,0)$) ovvero dai vettori tangenti in $(0,0)$ alle curve $t \to (th, f(th))$ $(h \in \mathbf{R}^2)$. Infine, $z = f(u) + < \nabla f(0,0), h >$, $h \in \mathbf{R}^2$ é il **piano tangente al grafico** di f nel punto $(u, f(u))$.

Significato geometrico del gradiente. $\frac{d}{dt} f(u+th) = \frac{\partial f}{\partial h}(u) = < \nabla f(u), h >$ é la pendenza della curva intersezione del grafico di f con il piano $\{(u+th, z) : t, z \in \mathbf{R}\}$. Da $\sup_{||h||=1} | < \nabla f(u), h > | \ = \ ||\nabla f(u)||$, segue: $\nabla f(u)$ é la direzione di massima pendenza del grafico di f in u e $||\nabla f(u)||$ é la massima pendenza di f in u.

ESRCIZIO 1. Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0. \qquad \text{É}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[(\alpha-2)x^2 + \alpha y^2]}{x\,(x^2+y^2)^2}, \qquad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[\beta x^2 + (\beta-2)y^2]}{y\,(x^2+y^2)^2} \qquad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Abbiamo visto che f é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 2$. Provare ora che

(i) esiste $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ $\forall\, h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(ii) f é differenziabile in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iii) $f \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha,\ \beta \geq 1$.

(i) $\alpha+\beta < 3 \ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3}f(x,y) \to_{x^2+y^2\to 0} +\infty$ (se $x^2+y^2 \neq 0$) e $\alpha+\beta = 3 \ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t} \to_{x^2+y^2\to 0} f(x,y)$ e quindi, se $\alpha+\beta \leq 3$, f non é derivabile, in $(0,0)$, nelle direzioni $h = (x,y) \neq (0,0)$. Invece, $\alpha+\beta > 3 \ \Rightarrow\ \frac{f(tx,ty)}{t} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0\ \forall\, h \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Da (ii) segue che f non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.
Sia $\alpha + \beta > 3$.
Siccome $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$f \text{ é differenziabile in } (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Siccome

$$\alpha \geq 3, \quad \alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\,|y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

basta considerare il caso $\alpha,\ \beta \in (0,3)$. Posto $\tau := \frac{\alpha+\beta-3}{2}$ é allora $\tau \in (0, \frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$, $\alpha + \beta - 2\tau = 3$ e

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\frac{|x|^{\frac{2}{3}(\alpha-\tau)}\,|y|^{\frac{2}{3}(\beta-\tau)}}{x^2+y^2}\right]^{\frac{3}{2}} |x|^\tau\,|y|^\tau \leq |x|^\tau\,|y|^\tau \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

di nuovo in virtú di $(*)$.

(iii) Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \le 3$. Sia $\alpha + \beta > 3$.

Come in (i) $\alpha \ge 1, \quad \alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad |\frac{\partial f}{\partial x}| \le \alpha \frac{|x|^{\alpha-1}|y|^\beta}{x^2+y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$

mentre, se $\alpha \in (0,1)$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)}\,[(\alpha-2)\,t^{2\gamma-2} + \alpha]}{(t^{2\gamma+2} + 1)^2} \to_{t\to 0^+} +\infty$$

Analogamente, $f_y \to_{x^2+y^2\to 0} 0$ sse $\alpha + \beta > 3$ e $\beta \ge 1$.

ESRCIZIO 2. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$g(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^4+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \ne 0, \quad g(0,0) = 0. \qquad \text{É}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2]}{x\,(x^4+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2\ne 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,[\beta x^4 + (\beta-2)y^2]}{y\,(x^4+y^2)^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2\ne 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

Provare che

(i) g é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 4$
(ii) esiste $\frac{\partial g}{\partial h}(0,0)$ $\forall\, h \in \mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 3$
(iii) g é differenziabile in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 5$ e $\alpha + \beta > 3$
(iv) $g \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 6$ e $\alpha, \beta \ge 1$.

(i) Se $\alpha + 2\beta < 4$, $g(tx, t^2y) = t^{\alpha+2\beta-4}g(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2\ne 0$) e quindi g non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + 2\beta > 4$.

Se $f(x,y) := \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}\,|y|^\beta}{x^2+y^2}$ é $g(x,y) = f(x^2,y) \to_{x^2+y^2\to 0} 0$ perché $\frac{\alpha}{2} + \beta > 2$ (vedi l'esercizio 1) e quindi g é continua.

(ii) $\alpha + \beta < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(tx,ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3}\,\frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{t^2x^4+y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} +\infty$ e

$\alpha + \beta = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(tx,ty)}{t} \to_{x^2+y^2\to 0} \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{y^2}$ (se $x^2+y^2\ne 0$) e quindi,

$\alpha + \beta \le 3 \quad \Rightarrow \quad f$ non é derivabile, in $(0,0)$, nelle direzioni $h = (x,y) \ne (0,0)$.

$\alpha + \beta > 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(tx,ty)}{t} \to_{x^2+y^2\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^2$.

(iii) Siccome $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$

$$g \text{ é differenziabile in } \quad (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Siccome $\alpha + 2\beta \leq 5 \;\Rightarrow\; \frac{g(t,t^2)}{\sqrt{t^2+t^4}} = t^{\alpha+2\beta-5}\frac{1}{2\,(1+t^2)}$ non tende a zero al tendere di t a zero, g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + 2\beta \leq 5$. Inoltre da (ii) segue che g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.

Sia dunque $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha + 2\beta > 5$. Da (i) e $(*)$ segue:

$$\alpha \geq 1,\ \alpha{+}2\beta > 5 \;\Rightarrow\; \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

$$\alpha < 1,\ \alpha{+}\beta > 3 \;\Rightarrow\; \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|^{\beta+\alpha-1}}{x^4+y^2}\left[\frac{|x|^{2\alpha}\,|y|^{2-2\alpha}}{x^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq |y|^{\alpha+\beta-3} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

(iv) Se $\alpha < 1$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)}\ [(\alpha-4)\,t^{4\gamma-2} + \alpha)}{(t^{4\gamma-2} + 1)^2} \to_{t\to 0^+} +\infty$$

Se $\beta < 1$ e $\gamma >> 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, t^\gamma) = \frac{t^{\alpha-4-\gamma(1-\beta)}\,[\beta + (\beta-2)t^{2\gamma-4}]}{(1 + t^{2\gamma-4})^2} \to_{t\to 0^+} +\infty$$

Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Inoltre, $\frac{\partial g}{\partial y}(t,t^2) = \frac{\beta-1}{2}\ t^{\alpha+2\beta-6}$ non tende a zero al tendere di t a zero se $\alpha + 2\beta \leq 6$ e quindi neanche in tal caso f ha derivate parziali continue in $(0,0)$.

Siano quindi $\alpha, \beta \geq 1$, $\alpha + 2\beta > 6$. Da (i) segue

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leq \frac{|x|^{\alpha-1}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2}\ \frac{(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2}{x^4 + y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leq \beta\,\frac{|y|^{\beta-1}\,|x|^{\alpha}}{x^4 + y^2} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$