Tutorato II

21/03/2005

Dato un modello statistico $\mathcal{F} = \{f(\cdot \mid \theta) \mid \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$ ed una statistica $T(y)$ allora T è una *statistica sufficiente* (per il parametro θ) se esiste una funzione h dei dati e una funzione g della statistica e del parametro per cui:

$$L(\theta|y) = f(y|\theta) = h(y)g(T(y), \theta).$$

N.B. g deve dipendere da y solo attraverso la $T(y)$.

Esercizio 1. Siano $y_1, \ldots, y_n$ n realizzazioni i.i.d. da una $Poisson(\theta)$. Verificare che

(a) $T_1(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ è sufficiente.

(b) $T_2(y) = (\sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} y_i^2)$ è sufficiente.

(c) $T_3(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i$ non è sufficiente.

Esercizio 2. Siano $y_1, \ldots, y_n$ n realizzazioni i.i.d. da una $Bernulli(\theta)$. Verificare che $T(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ è sufficiente per θ.

Esercizio 3. Siano $y_1, \ldots, y_n$ n realizzazioni i.i.d. da una $Beta(\alpha, \beta)$ ($\theta = (\alpha, \beta)$ entrambi incogniti).
Verificare che $T(y) = (T_1(y), T_2(y)) = (\prod_{i=1}^{n} y_i, \prod_{i=1}^{n}(1 - y_i))$ è sufficiente per θ.

Esercizio 4. Siano $y_1, \ldots, y_n$ n realizzazioni i.i.d. da una $Gamma(\lambda, 5)$. Verificare che $T(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ è sufficiente.

Esercizio 5. Siano $y_1, \ldots, y_n$ n realizzazioni i.i.d. da un densità

$$f(y|(\lambda,\theta)) = \begin{cases} 0 & y < \lambda \\ \frac{1}{\theta} e^{-(y-\lambda)\frac{1}{\theta}} & y \geq \lambda. \end{cases}$$

con θ e λ entrambi incogniti.

(a) Verificare che $f(y)$ è una densità.

(b) Scrivere la funzione di verosimiglianza per (λ, θ) e trovare una statistica sufficiente.

Esercizio 6. Siano $y_1 \ldots y_n$ n realizzazioni i.i.d. da una densità

$$f(y|\theta) = \frac{1}{e^{-\theta} - e^{-1}} e^{-y} I_{(\theta,1)}(y)$$

dove $\theta \in (-\infty, 1)$, determinare la statistica sufficiente.

Esercizio 7. Siano $y_1 \ldots y_n$ n realizzazioni i.i.d. da una densità

$$f(y|\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|y|}{\theta}}.$$

Determinare la statistica sufficiente.